APPRENDRE

GROUPE THÉMATIQUE D'EXPERTISE 4

PROMOTION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES

2026

Exemples d'outils contextualisés pour la **formation d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques**

VOL. 3

Proportionnalité, fonctions numériques, pré-algèbre et algèbre

AUF AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE

MINISTÈRE DE L'EUROPE ET DES AFFAIRES ÉTRANGÈRES
Liberté
Égalité
Fraternité

AFD AGENCE FRANÇAISE DE DÉVELOPPEMENT

LE PROGRAMME APPRENDRE

Actif depuis 2018, le programme APPRENDRE a pour mission de renforcer la professionnalisation des enseignantes et enseignants, d'améliorer la qualité de la formation initiale et continue, et de soutenir leur développement professionnel tout au long de leur carrière. Le programme agit à la fois sur les pratiques pédagogiques, sur les statuts enseignants et sur la gouvernance de la profession. En cela, il contribue à l'amélioration de la condition enseignante et à la création d'un environnement favorable à une meilleure qualité des enseignements-apprentissages, conformément à l'Objectif de Développement Durable 4 (ODD 4) des Nations unies.

Pour atteindre ces objectifs, APPRENDRE mobilise son réseau d'expertise et facilite l'accès à des ressources, outils et savoirs.

APPRENDRE accompagne les ministères de l'Éducation de 23 pays francophones dans le renforcement des capacités de leurs personnels d'encadrement et d'accompagnement pédagogique. À la demande de ces pays, APPRENDRE mobilise un réseau d'expertise et de partenaires (personnes praticiennes, chercheuses, cadres éducatifs et universitaires) pour réaliser des missions de formation, d'audit, de diagnostic et d'ingénierie.

Les appuis mis en place par APPRENDRE ciblent prioritairement les directions et institutions responsables de la formation initiale et continue des personnels enseignants dans les pays concernés. L'identification des actions à mener s'appuie sur le recueil des besoins des actrices et des acteurs, dans une démarche partenariale fondée sur le dialogue et l'échange. Chaque pays définit son Plan de Travail Annuel (PTA) en étroite collaboration avec les huit Groupes Thématiques d'Expertise (GTE) du programme. C'est ensemble qu'un diagnostic est effectué, qu'une réflexion est menée et que les actions à mettre en place sont déterminées.

APPRENDRE n'est pas un dispositif de formation et ne se substitue pas aux financements sectoriels de l'éducation. Ses appuis, ponctuels et ciblés, s'inscrivent en amont des projets nationaux conçus et pilotés par les pays et renforcent les capacités de conception, de pilotage et de suivi des ministères.

Par ses interventions, APPRENDRE contribue à améliorer durablement la qualité des enseignements et des apprentissages dans les systèmes éducatifs francophones.

CE GUIDE A ÉTÉ CONÇU PAR :

Denis BUTLEN, professeur des universités émérite à CY Cergy Paris Université (France), coordinateur du Groupe Thématique d'Expertise 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences »

Adolphe Cossi ADIHOU, professeur titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada)

Jeanne KOUDOGBO, professeure titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada)

Julie HOROKS, professeure des universités en didactique des mathématiques à l'Université Paris-Est Créteil (UPEC, France)

Sylvie COPPÉ, retraitée, anciennement maîtresse d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève (Suisse)

Gervais AFFOGNON, docteur en didactique des mathématiques, chargé de cours au lycée et dans les écoles de formation du Bénin

SOUS LA COORDINATION DE :

Denis BUTLEN, professeur des universités émérite à CY Cergy Paris Université (France), coordinateur du Groupe Thématique d'Expertise 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences »

CONCEPTION GRAPHIQUE, MISE EN PAGE ET RÉVISION SCIENTIFIQUE : Alexandre LOURDEL

ÉDITION ET CORRECTION : Fanny PIAT-GILLES

PHOTO DE COUVERTURE : Joannès DOGLO

Ce guide est placé sous la licence Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-SA 4.0).

Paris, 2026.

APPRENDRE

GROUPE THÉMATIQUE D'EXPERTISE 4

PROMOTION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES

2026

Exemples d'outils contextualisés pour la **formation d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques**

VOL. 3

Proportionnalité, fonctions numériques, pré-algèbre et algèbre

AUF AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE

MINISTÈRE DE L'EUROPE ET DES AFFAIRES ÉTRANGÈRES
Liberté
Égalité
Fraternité

AFD AGENCE FRANÇAISE DE DÉVELOPPEMENT

Sommaire

SOMMAIRE

Exemples d'outils contextualisés pour la formation d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques

Vol. 3 : Proportionnalité, fonctions numériques, pré-algèbre et algèbre

Remerciements 9

INTRODUCTION 10

1. Préambule 11
2. Le programme APPRENDRE 11
3. Présentation du GTE 4 11
4. Un document regroupant des outils de formation contextualisés 12
   - 4.1 Trois documents s'inscrivant dans une continuité 12
   - 4.2 Les thèmes mathématiques abordés 13
   - 4.3 Des outils davantage contextualisés 14
     - 4.3.1 L'analyse conceptuelle 14
     - 4.3.2 La cartographie/continuum 15
     - 4.3.3 La carte conceptuelle 15
     - 4.3.4 La fiche pédagogique 16
   - 4.4 Prise en compte de domaines plus larges 16
   - 4.5 Prise en compte du contexte local 17
5. Les auteurs et les pays 17
6. Des principes de formation 18
7. La structure du document 19

PREMIÈRE PARTIE | Proportionnalité et fonctions numériques : fonctions affines et linéaires 21

1. L'enseignement de la proportionnalité 23
   - 1.1 Introduction 23
     - 1.1.1 Situations de proportionnalité 23
     - 1.1.2 Cadres de travail 24
     - 1.1.3 Procédures de résolution 24
     - 1.1.4 Tableau de proportionnalité 24
     - 1.1.5 Produit en croix 25

1.2 Analyse conceptuelle de l'enseignement de la proportionnalité 25
1.3 Cartographies / continuums 30
1.3.1 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire à Madagascar 30
1.3.2 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire (Togo) 32
1.3.3 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au secondaire (Togo) 33
1.3.4 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire et secondaireau Togo (synthèse) 35
1.3.5 Carte conceptuelle (synthèse de l'enseignement primaire et secondaire à Madagascar et au Togo) 37
1.4 Fiche pédagogique 38
2. L'enseignement des fonctions linéaires et affines 46
2.1 Introduction 46
2.1.1 Introduction de la notion de fonction 46
2.1.2 Registres de représentation 47
2.2 Analyse conceptuelle de l'enseignement des fonctions numériques 48
2.3 Cartographie / continuum de l'enseignement des fonctions linéaires et affines (Madagascar) 51
2.4 Carte conceptuelle de l'enseignement des fonctions (Madagascar) 53

SECONDE PARTIE | Pré-algèbre et algèbre : notion d'égalité / relation d'égalité 55

1. Introduction 57
1.1 Contexte de coproduction de ressources pour l'enseignement des mathématiques 57
1.2 Présentation du thème 58
1.3 Que révèlent les programmes d'études ? 59
2. Ressources pour l'enseignement de la relation d'égalité 60
2.1 Analyse conceptuelle de l'enseignement de la relation d'égalité 60
2.2 Cartographies / continuums pour l'enseignement de la relation d'égalité 65
2.2.1 Cartographie / continuum pour l'enseignement de la relation d'égalité au secondaire à Djibouti 65
2.2.2 Cartographie / continuum pour l'enseignement de la relation d'égalité au primaire en Côte d'Ivoire 68
2.3 Carte conceptuelle unique pour l'enseignement de la relation d'égalité 70

2.4 Fiches pédagogiques pour l'enseignement de la relation d'égalité 71
2.4.1 Fiche pédagogique pour l'enseignement de la relation d'égalité au secondaire à Djibouti 71
2.4.2 Fiche pédagogique pour l'enseignement de la relation d'égalité au primaire en Côte d'Ivoire 81

CONCLUSION GÉNÉRALE 91

BIBLIOGRAPHIE 97

1. Enseignement de la proportionnalité et des fonctions numériques 99
1.1 Enseignement de la proportionnalité 99
1.2 Enseignement des fonctions linéaires et affines 99
2. Enseignement de l'égalité 100

PRÉSENTATION DES AUTEURS 101

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier le conseil scientifique du programme APPRENDRE et les coordinateurs du programme, en particulier Johanna GARDREL, Sophie DOBOSZ et Nicolas BARBE pour la confiance et l'appui qu'ils ont accordés à ce projet.

Merci aussi aux 36 participantes et participants aux groupes de production associés aux webinaires de renforcement du pôle des expertes et experts associés et notamment aux 21 participantes et participants des groupes de production de documents en mathématiques. Ils ont contribué à la production de cette ressource par leur questionnement, leur investissement dans la réflexion et la rédaction.

Nous tenons à remercier l'Agence Universitaire de la Francophonie et l'Agence Française du Développement pour leur soutien logistique et financier au programme APPRENDRE et la production de cette ressource.

Nous remercions aussi Fanny PIAT-GILLES et Alexandre LOURDEL pour leur participation à la mise en page et l'édition de ce document.

Introduction

Préambule

Pour ne pas alourdir la rédaction du guide et dans un souci de facilitation de la lecture, l'écriture inclusive n'a pas été systématiquement utilisée. Mais il faut bien comprendre dans l'utilisation des termes *enseignants*, *formateurs*, *experts*, *rédacteurs*, *lecteurs*, etc. que cela concerne bien évidemment aussi les enseignantes, formatrices, expertes, rédactrices, lectrices, etc.

Le programme APPRENDRE

Le programme APPRENDRE a pour objectif de mobiliser de l'expertise dans le domaine pédagogique, didactique et universitaire. Il accompagne les ministères de l'Éducation de 23 pays francophones en matière de renforcement des capacités des enseignants du primaire et du secondaire. À la demande de ces pays, APPRENDRE mobilise un réseau d'expertes et d'experts et de partenaires (praticiennes et praticiens, cadres éducatifs, universitaires, chercheuses et chercheurs) pour des missions de formation, d'audit, de diagnostic et d'ingénierie.

Les appuis mis en place par APPRENDRE ciblent prioritairement les directions et institutions nationales responsables de la formation initiale et continue des enseignants dans les pays concernés.

L'identification des actions à mener s'appuie sur le recueil des besoins des acteurs, dans une démarche partenariale fondée sur le dialogue et l'échange. Chaque pays définit son plan d'action (PTA) en étroite collaboration avec les expertes et experts du programme. Ensemble, ils établissent un diagnostic, mènent une réflexion et déterminent les actions à mettre en place.

APPRENDRE n'est pas un dispositif de formation. Il n'a pas vocation à se substituer aux financements sectoriels de l'éducation dans les pays éligibles. Ses appuis, ponctuels et ciblés, s'inscrivent en amont des projets nationaux conçus et pilotés par les pays et viennent renforcer les capacités de conception et de suivi des ministères.

Présentation du GTE 4

Ce document a été rédigé par les expertes et experts didacticiens des mathématiques du Groupe Thématique d'Expertise « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » (GTE 4). Le GTE 4 a pour mission de proposer une expertise aux pays

éligibles au programme afin d'aider les ministères dans le domaine de la formation des personnels en charge de la formation des enseignantes et enseignants de mathématiques et de sciences. Il peut être amené à effectuer des missions d'audit, de diagnostic, d'ingénierie ou encore de recherche.

Le GTE 4 se donne pour objectif général de contribuer à l'amélioration de la formation des élèves dans les disciplines relevant des sciences dites dures : mathématiques, sciences de la nature (biologie, géologie), sciences de la matière (physique, chimie). De manière plus spécifique, cet objectif se décline selon deux orientations non exclusives l'une de l'autre :

- Favoriser le développement de la recherche sur l'enseignement et les apprentissages de ces disciplines et la diffusion des résultats qui en sont issus vers les communautés scientifiques et éducatives ;
- Soutenir les actions de développement professionnel des enseignantes et enseignants et de leurs formatrices et formateurs ainsi que la production de ressources pédagogiques adaptées aux réalités des contextes.

Le GTE 4 est constitué d'expertes et experts didacticiens des mathématiques ou didacticiennes et didacticiens des sciences (SVT, sciences physiques). Ses principales missions consistent notamment à animer des ateliers de formation de formateurs et à proposer aux différents pays des outils de formation pour les enseignants. Depuis sa création, il a ainsi participé ou participe actuellement à des activités dans les 23 pays concernés par le programme.

Un document regroupant des outils de formation contextualisés

Trois documents s'inscrivant dans une continuité

Ce document s'inscrit dans une série d'outils de formation à destination des formateurs d'enseignants de mathématiques et de sciences du premier et second degré. Il complète un premier volume : le *Guide pour le formateur d'enseignants de mathématiques*, ainsi qu'un deuxième volume : le *Glossaire de didactique des mathématiques*. Le guide présente des outils pour la formation et les concepts de didactique des mathématiques qui sont à l'origine de leur élaboration. Ces outils constituent un tout allant d'un questionnement permettant l'analyse d'un concept ou de concepts d'un même domaine (**analyse conceptuelle et carte conceptuelle**) à un modèle de **fiches pédagogiques** ciblant le

ou les concepts en passant par une analyse du traitement de ces derniers dans les programmes de mathématiques du pays ciblé par l'atelier (**cartographie/continuum**). Des grilles d'analyse de séquences de mathématiques et d'erreurs d'élèves complètent ces quatre types d'outils. Des exemples décontextualisés, élaborés lors d'ateliers de formation de formateurs, expérimentés et évalués, illustrent ces catégories d'outils. Un glossaire présente les principaux concepts didactiques utilisés pour construire ces outils.

Une seconde rédaction de ces exemples du guide a été produite par les auteurs du guide afin de permettre une utilisation par les formateurs des différents pays concernés par le programme APPRENDRE. Cela a nécessité une prise de distance par rapport aux spécificités de l'enseignement de chaque pays et une certaine décontextualisation.

Dans un second temps et afin de prendre en compte ces spécificités, ce document constitue un complément au guide présentant des exemples plus contextualisés par pays. Il doit permettre aux formateurs de chaque pays concerné de mieux prendre en compte et d'adapter la formation aux particularités, aux contraintes et aux exigences institutionnelles de son pays. Toutefois, les exemples de chaque catégorie d'outils sont suffisamment emblématiques de la catégorie pour pouvoir être adaptés aux contextes d'autres pays.

Le GTE 4 a organisé durant l'année 2023-2024 une série de huit webinaires ayant pour but de renforcer le pôle des expertes et experts associés en mathématiques et en sciences. Cette formation comportait des exposés et des groupes de production de documents pour la formation. Comme le guide, cet ouvrage est donc le résultat d'une expérimentation collective et d'une réflexion de plusieurs années menées par les experts intervenant dans les ateliers de formation de formateurs. Il est aussi et avant tout le résultat d'une synthèse de productions co-construites entre personnes participantes et expertes et experts lors de ces groupes de production associés aux webinaires. Le travail de production a été ponctué par les séances de mathématiques du webinaire.

Les thèmes mathématiques abordés

Des thèmes spécifiques à chaque groupe ont été proposés aux participantes et participants et approuvés par ceux-ci. Il s'agit pour les mathématiques des domaines suivants : géométrie plane (groupe 1), géométrie dans l'espace (groupe 3), proportionnalité et fonctions numériques (groupe 2), nombres décimaux (groupe 4), sens des opérations et techniques opératoires (groupe 5), pré-algèbre et algèbre (groupe 6).

Des séances de travail en synchrone et asynchrone ont permis des échanges, des moments de production et de validation. Au cours de ces séances, les thèmes ont été affinés afin de cibler un ou plusieurs concepts. Ainsi, le groupe 1 a-t-il centré son travail sur la production d'une grille générique (à remplir) permettant de construire une

cartographie/continuum de l'enseignement de grandes catégories d'objets (concepts, sous concepts, techniques, instruments) de la géométrie plane. Le groupe 2 a ciblé la proportionnalité et l'enseignement des fonctions affines et linéaires. Le groupe 4 a davantage fait porter sa réflexion sur l'enseignement des solides et de leurs représentations. Enfin le groupe 6 a exploré l'enseignement de l'égalité.

Des outils davantage contextualisés

Les différents groupes ont développé les exemples d'outils présentés dans le guide. Il s'agit des analyses conceptuelles, des cartographies/continuums, des cartes conceptuelles et des fiches pédagogiques. Chaque thème est introduit par un texte présentant une synthèse de résultats de recherches et d'éléments à prendre en compte pour enseigner le domaine exploré ainsi que le contexte de la rédaction des outils.

Pour chacun des thèmes traités dans cet ouvrage, nous avons retenu une analyse conceptuelle et une carte conceptuelle synthèse des productions des participants des différents pays concernés par le groupe de production. Ces deux types de documents sont décontextualisés et concernent donc tous les pays. Les deux autres catégories de documents sont contextualisées. Nous avons ainsi retenu pour chaque pays concerné par le groupe de production une cartographie/continuum correspondant aux programmes d'enseignement des mathématiques du pays et un exemple de fiche pédagogique. Le choix du niveau d'enseignement de la cartographie/continuum (primaire ou secondaire) est en adéquation avec le niveau de classe de la fiche pédagogique.

Nous rappelons brièvement ci-dessous ces différentes catégories et renvoyons le lecteur aux différents chapitres du guide pour une présentation plus complète et détaillée des outils et des concepts didactiques qui ont été mobilisés pour leur élaboration (chapitres 2 et 3) et des exemples décontextualisés (chapitre 4).

L'analyse conceptuelle

> « Conçue à partir des trois éléments qui définissent un concept selon la théorie des champs conceptuels, la grille d'analyse conceptuelle est un ensemble de questions relatives à un concept donné. C'est un outil pour l'enseignant qui prépare sa classe en vue d'enseigner un concept. Il a besoin de puiser dans son expérience et dans sa culture académique et didactique pour trouver des éléments de réponses pertinents à chacune des questions de la grille. L'analyse conceptuelle constitue un moment de l'analyse à priori d'un concept mathématique. »
>
> Le questionnement est organisé autour du triplet défini par Vergnaud (1980) : les situations dans lesquelles fonctionnent le concept, les invariants opératoires (signifié) sur

lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (type « propositions », type « fonction propositionnelle » ou encore type « argument ») et enfin les formes langagières et non langagières (L) qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Un ou plusieurs exemples de grilles (remplies) d'analyse conceptuelle sont donnés pour les différents thèmes.

La cartographie/continuum

« La cartographie/continuum du programme est une vue synthétique du programme pour un concept donné » et pour un pays donné. « Elle met en évidence les différentes notions à aborder et présente leur évolution dans le cycle. [Pour] réaliser une cartographie/continuum d'un concept [il faut] :

- recenser tous les sous-thèmes relatifs à un concept (du domaine ou du programme) et positionner les sous-thèmes par rapport au niveau scolaire en mettant des signes ;
- associer clairement dans un tableau les niveaux scolaires respectifs où les sous-thèmes prévus dans le domaine ou le programme ;
- se servir de l'analyse conceptuelle et faire une analyse mathématique et didactique pour catégoriser les sous-thèmes. »

La cartographie/continuum contribue à la conception de la carte conceptuelle.

La carte conceptuelle

« La carte conceptuelle est une représentation graphique d'un domaine de connaissance tel que perçu par un ou plusieurs individus, et qui établit des liens entre différents concepts évoqués par son ou ses auteurs (Laflamme, 2006, p. 8).

La carte conceptuelle pour un concept donné est un modèle qui se construit à partir des cinq catégories de la cartographie/continuum (premier niveau de profondeur : sens et représentation, techniques opératoires (et relations), usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude) ; propriétés et transformations ; liens avec des domaines mathématiques).

Les sous-concepts ayant contribué à la catégorisation dans la cartographie-continuum serviront à finaliser le deuxième niveau de profondeur de la carte conceptuelle. À ces sous-concepts s'en ajoutent d'autres, circonscrits dans l'analyse conceptuelle.

Ainsi, la carte conceptuelle explicite les liens entre le concept et les sous-concepts qui caractérisent ce concept. Elle peut également permettre d'établir des liens entre

les différents sous-concepts. Elle présente les sous-concepts (savoirs mis en jeu) du programme et met en évidence, pour le formateur et l'enseignant, d'autres sous-concepts qui ne sont pas dans le programme. »

La fiche pédagogique

Le guide pédagogique présente un modèle de canevas de fiche pédagogique comportant 13 sections.

« Les 9 premières sections visent à fournir des informations d'ordre général sur les intentions de l'enseignant et les objectifs de la leçon. [...] La section 10 est consacrée aux anticipations. [...] La section 11 concerne le déroulement. [...] La section 12 propose des exercices d'approfondissement [...] La section 13 [concerne un] bilan de la séance. »

Dans ce volume, nous présentons des fiches pédagogiques décrivant des séances ou séquences qui n'ont pas été systématiquement testées en classe par les auteurs. La section 13 qui porte sur un bilan de mise en œuvre des séances n'est donc pas renseignée et reprise dans les différents exemples proposés.

Prise en compte de domaines plus larges

Deux des thèmes de travail des groupes de productions en mathématiques portaient sur des domaines ou sous-domaines mathématiques plutôt que sur un concept donné. C'est le cas du groupe qui a travaillé sur la géométrie plane et celui qui a travaillé sur la géométrie dans l'espace. Les tuteurs de ces groupes ont été amenés à adapter certains outils conçus pour le traitement d'un concept à un traitement d'un domaine.

Nous avons retenu ce nouvel outil qui enrichissait la panoplie des outils précédemment présentés dans le guide. Nous le désignons par le même terme.

L'organisation et les contenus des rubriques diffèrent. C'est ainsi le cas de la grille qui permet de construire une carte conceptuelle du traitement des figures planes.

Prise en compte du contexte local

Alors que les analyses conceptuelles et les cartes conceptuelles dépassent le contexte et les injonctions institutionnelles des différents pays et permettent d'avoir une appréhension plus distanciée du concept et de son enseignement, les cartographies/continuums

et les fiches pédagogiques ont été élaborées en conformité avec les programmes d'enseignement des pays représentés dans le groupe de travail. Toutefois, ces dernières restent adaptables pour être utilisables dans d'autres contextes nationaux.

Ainsi, des exemples de mises en œuvre contextualisées du modèle de fiche pédagogique sont exposés pour chaque chapitre et pour chaque thème. Selon les cas, telles ou telles rubriques sont plus particulièrement développées afin de prendre en compte les normes en vigueur dans les pays. *A contrario*, certaines rubriques peuvent être minorées voire absentes. Les auteurs ont cependant accordé une importance aux analyses *a priori* des situations proposées dans les fiches que ce soit dans une rubrique ou dans un préambule à celle-ci.

Les auteurs et les pays

Les 36 participants représentant 13 pays d'Afrique subsaharienne ont constitué des groupes de production dont 21 se sont focalisés sur les mathématiques. Six groupes étaient en effet consacrés à la production de documents de formation en mathématiques reprenant les catégories d'outils présentés dans le *Guide pour le formateur d'enseignants de mathématiques*.

Ces 21 participants, issus du Bénin, Burundi, Cameroun, Comores, République Démocratique du Congo, Côte d'Ivoire, Djibouti, Guinée, Madagascar, Mauritanie, Sénégal, Tchad et Togo ont produit 66 documents.

La composition des groupes est la suivante :

1. **Le groupe 1** animé par J. Horoks était constitué de I. Faye, B. P. Kakpo, A. J. B. Lououamou et O. Sagna.
2. **Le groupe 2** animé par S. Coppé comportait K. D. Wodome, B. N. F. Olafa, N. H. Rabearimanana et E. Rajaonarimaanana.
3. **Le groupe 3** animé par J. Koudogbo était constitué de M. Blenoume, A. C. Cobi et M. Faye.
4. **Le groupe 4** animé par G. Affognon comportait B. Mbairareaou, A. Raherinirina, T. Rakotoniaina et S. Wandji.
5. **Le groupe 5** animé par D. Butlen comportait F. Arzel, A. H. Mazikou, A. F. M. Niyonzima et I. D. Malor.
6. **Le groupe 6** animé par A. C. Adihou était constitué de A. Iltireh et K. Y. G. Atta.

Dans l'ensemble des trois volumes, nous présentons 39 de ces productions. Le lecteur trouvera dans la conclusion de l'ouvrage, une description détaillée de ces différentes productions et les modalités d'accès à la plateforme APPRENDRE.

Des principes de formation

La formation dispensée lors des webinaires et les compléments apportés lors des séances de travail des groupes de production s'inscrivent dans le cadre des principes de formation définis dans le guide.

Sans exposer le détail de ces principes, exposé dans le chapitre 1 du guide, rappelons que les autrices et auteurs s'inscrivent dans une logique de didactique outil. « Les concepts et éléments de théorie [...] n'ont pas pour but d'être une formation au métier de chercheur, mais constituent des outils pour aider les enseignants dans l'exercice quotidien de leur métier et les formateurs dans la construction de modules de formation. Il ne s'agit pas de présenter des édifices théoriques éclairant les questions d'enseignement, mais de donner des éléments issus de ces constructions théoriques permettant d'accroître les marges de manœuvre des professeurs et d'optimiser la transposition didactique. »

Les auteurs visent à fournir des outils aux enseignants et aux formateurs d'enseignants pour exercer une vigilance didactique propice aux apprentissages des élèves (Charles-Pézard, 2010, Charles-Pézard, Butlen et Masselot, 2012 et 2018).

« D'autres principes fondent la manière de penser les actions de formation. Citons notamment la volonté :

- d'entrer en résonance avec les conceptions et représentations des formateurs afin de les enrichir notamment en les diversifiant. [...]
- de développer une approche holistique de formation intégrant des apports d'informations, le vécu de situations de formation [...], la co-construction de documents [...] et une approche réflexive sur des exemples de pratiques et les gestes nécessaires à la gestion de la classe ;
- d'expérimenter quand cela est possible des moments de formation, de les exposer et de les analyser lors d'un retour en atelier ;
- d'enrichir les pratiques de formateurs et des enseignants ;
- de prévoir des moments de travail sur différents temps d'analyse de la gestion des enseignements : micro, local et macro ;
- de prendre en compte les spécificités et les conditions du système éducatif propres à chaque pays. »

La structure du document

L'ouvrage, qui complète le *Guide du formateur d'enseignants de mathématiques*, porte le titre *Exemples d'outils contextualisés pour la formation d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques*. Il se compose de trois volumes distincts, chacun consacré à un domaine spécifique :

1. **Volume 1 :** Nombres et opérations ;
2. **Volume 2 :** Géométrie plane et géométrie dans l'espace ;
3. **Volume 3 :** Proportionnalité, fonctions numériques, pré-algèbre et algèbre.

Cette série offre ainsi une déclinaison thématique pour accompagner la formation des enseignants de mathématiques dans différents champs disciplinaires.

Ce volume 3 concerne deux domaines mathématiques : l'enseignement de la proportionnalité et des fonctions linéaires et affines d'une part et l'ensemble de la pré-algèbre et de l'algèbre d'autre part.

Une introduction présente le document, les auteurs et le contexte de son élaboration.

Une conclusion et une bibliographie terminent cet ouvrage.

Nous espérons que ce document présentant des exemples d'outils plus contextualisés par pays et par contenus mathématiques enseignés contribuera à mieux outiller les formateurs d'enseignants de mathématiques et ainsi participera à construire un environnement didactique améliorant les apprentissages des élèves.

PREMIÈRE PARTIE

Proportionnalité et fonctions numériques : fonctions affines et linéaires

Ce chapitre traite de l'enseignement de la proportionnalité et des fonctions linéaires et affines. Les documents ont été produits dans le cadre du groupe de production associé aux webinaires de renforcement du pôle des experts associés coordonné par Sylvie Coppé. Les pays concernés sont Madagascar et le Togo.

1 L'enseignement de la proportionnalité

1.1 Introduction

La proportionnalité est un thème d'enseignement important, car cette notion permet de résoudre de nombreux problèmes et c'est un modèle qui est souvent mobilisé dans la vie courante. De plus, cette notion est enseignée dès l'école primaire et se poursuit au secondaire ou dans les thèmes mathématiques (voir l'analyse et la carte conceptuelles). Son étude se fait en lien avec celle des fonctions (notamment linéaires).

La résolution des problèmes dits de 4e proportionnelle nécessite la mobilisation de connaissances sur les quatre opérations, sur les fractions et les décimaux et sur l'algèbre. Enfin plusieurs registres de représentation peuvent être utilisés : celui de la langue naturelle et les registres algébriques, graphiques ou géométriques.

1.1.1 Situations de proportionnalité

Le modèle proportionnel est souvent employé pour résoudre des problèmes, mais ce n'est pas le seul et il est donc important de faire comprendre aux élèves pourquoi et quand ce modèle est applicable. Par exemple, dans les problèmes de prix de vente (du type on connait le prix de 3 kg de farine et on cherche le prix de 5 kg) la modélisation par la proportionnalité relève d'un usage social et peut ne pas se vérifier dans d'autres contextes (par exemple, le prix d'une maison n'est en général pas proportionnel au nombre de ses pièces). Dans d'autres cas, la modélisation par la proportionnalité relève d'une démarche expérimentale qui s'appuie sur un relevé de mesures. Dans le cadre géométrique, on peut démontrer que certaines relations relèvent de la proportionnalité (par exemple le périmètre d'un carré ou la longueur de ses diagonales sont proportionnels à la longueur du côté). Il est donc important, d'une part que les élèves

soient confrontés à différents contextes et d'autre part de préciser pourquoi on choisit le modèle proportionnel. Il est également fondamental de faire rencontrer des situations de non-proportionnalité (autres que la taille et l'âge qui sont souvent citées).

1.1.2 Cadres de travail

La proportionnalité peut être travaillée dans trois cadres : celui des grandeurs, celui, numérique, des tableaux de nombres et enfin le cadre graphique avec des séries de points. Il est également important, d'une part de varier ces cadres dans les problèmes et d'autre part, de permettre aux élèves de faire des liens entre eux (notamment pour vérifier).

1.1.3 Procédures de résolution

Pour le traitement des situations de proportionnalité, selon le niveau scolaire, les principales procédures, liées aux propriétés des fonctions linéaires, sont :

- l'utilisation du coefficient de proportionnalité ;
- le retour à l'unité (cas particulier du coefficient de proportionnalité) ;
- l'utilisation des propriétés de linéarité (propriétés des fonctions linéaires) ;
- l'utilisation de l'égalité des rapports ;
- l'utilisation de l'égalité des produits en croix ;
- l'utilisation de la représentation graphique.

Là encore, il est essentiel que ces procédures soient disponibles pour les élèves afin qu'ils puissent les mobiliser selon les données des problèmes. C'est particulièrement le cas des propriétés de linéarité qui permettent souvent de décider si le modèle proportionnel est valide (si on double une grandeur, est ce que l'autre est également doublée ?).

Finissons ce rapide tour d'horizon par quelques points de vigilance.

1.1.4 Tableau de proportionnalité

Très souvent, il y a une confusion dans les exercices ou problèmes entre situation de proportionnalité et tableau de proportionnalité. Il est donc important de lever cette ambiguïté et de ne pas proposer que des problèmes avec des tableaux de nombres sans contexte, car il y a alors deux risques pour les élèves qui pourront devenir des obstacles

au moment de l'étude des fonctions : penser que tout tableau de nombres est un tableau de proportionnalité (et donc que toutes les fonctions sont linéaires) et penser que parce que l'on constate que n couples d'un tableau sont dans la même proportion, la fonction est linéaire (ce qui correspond à toujours relier deux points par un segment de droite). Enfin on peut s'interroger sur la pertinence d'utiliser un tableau lorsqu'on a un petit nombre de couples (notamment deux, ce qui est un cas fréquent).

1.1.5 Produit en croix

Le second point concerne l'utilisation du produit en croix notamment chez des élèves jeunes qui n'ont pas encore les connaissances mathématiques sur les fractions leur permettant de comprendre la justification de cette technique. Il y a alors un risque que les élèves appliquent une technique sans la comprendre et donc sans avoir de moyens de contrôle (ils peuvent alors placer au hasard les nombres en jeu).

1.2 Analyse conceptuelle de l'enseignement de la proportionnalité

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
1.	**Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (la référence) ?**	▸ Calcul d'une quatrième proportionnelle dans des problèmes multiplicatifs. Exemple : « Sachant le prix de 3 kg de …, calculez le prix de 5 kg, de 6 kg, de 22 kg, etc. ». ▸ Problèmes de partage / rapport. ▸ Situations faisant appel à des taux (taux d'intérêt sur un compte d'épargne, taux de participation à une consultation électorale, taux de change d'une devise, taux de prévalence d'une maladie, etc.). ▸ Agrandissement / réduction d'une figure géométrique. ▸ Notion d'échelle. ▸ Calculs de pourcentages ou appliquer un pourcentage (par exemple, calcul d'intérêts sur des comptes d'épargne). ▸ Calcul de la vitesse moyenne $V_m = \frac{D}{t}$. ▸ Calcul de la circonférence et de l'aire d'un disque ($\frac{C}{r} = 2\pi$; $\frac{A}{r^2} = \pi$). ▸ Problèmes impliquant la masse volumique, la concentration d'une solution, le débit. ▸ Calcul de l'intensité, de la tension électrique et de la quantité d'électricité (parfois nommée charge électrique) (loi d'Ohm : $\frac{U}{I} = R$). ▸ Calculs de distance en utilisant le théorème de Thalès.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
2.	**Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Multiplication et division. ▸ Fraction (simplification, fraction équivalente, etc.). ▸ Pourcentage / taux. ▸ Triangle semblable / figure géométrique semblable ou homothétique. ▸ Théorème de Thalès. ▸ Moyenne, fréquence, etc. ▸ Vitesse moyenne (distance, temps de trajet). ▸ Électricité : loi d'Ohm (U = RI). ▸ Masse volumique. ▸ Coefficient d'agrandissement ou de réduction de figures. ▸ Théorème de Thalès. ▸ Fonction linéaire.
3.	**Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Matériels TIC (calculatrice, ordinateur, logiciels, tableur). ▸ Toutes figures pour représenter une proportion (intervalle, diagrammes, schémas en barre, etc.). ▸ Des recueils de données. ▸ Instruments de construction géométrique : règle, équerre, compas, rapporteur. ▸ Tables numériques.
4.	**Quelles difficultés ces ressources (matérielles ou autres) ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques ou contextuelles) choisies peuvent-elles amener ?**	▸ Identification des situations de proportionnalité dans des contextes très variés. ▸ Lecture et interprétation des graphiques / tableaux de proportionnalité. ▸ Précision insuffisante de certaines données issues de mesures. ▸ Accès limité aux instruments de calcul. ▸ Difficultés dans l'interprétation des données.
5.	**Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l'élève et sur lesquelles reposerait l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ?**	▸ Traduction de la situation par un tableau, une équation, une fonction, une représentation graphique. ▸ Utilisation du coefficient de proportionnalité. ▸ Utilisation des propriétés de linéarité. ▸ Retour à l'unité, règle de trois. ▸ Lecture de graphique, prise de données sur un graphique. ▸ Mise en lien tableau de valeurs / graphiques / formule. ▸ Égalité de fractions.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
6.	**Quels raisonnements mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Inductif (du particulier au général). ▸ Conjecture, approximation, essai, vérification. ▸ Par analogie avec des situations similaires. ▸ Déductif (généralisation) et démonstration. ▸ Démarche expérimentale (observation, hypothèse, expérimentation, etc.).

7.	**Quelles difficultés peuvent être révélées chez l'élève au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Liées aux calculs notamment avec les opérations de division et multiplication.
		▸ Liées aux calculs avec les fractions ou décimaux.
		▸ Liées au calcul littéral.
		▸ Difficultés à modéliser les situations et à distinguer des situations proportionnelles ou non.
		▸ Difficultés dans la mise en œuvre des procédures et approches (coefficient de proportionnalité ou propriétés de linéarité).
		▸ Difficultés dans l'utilisation des outils :
		  • Faible maîtrise des calculatrices et tableurs ;
		  • Faible maîtrise de l'utilisation des instruments de géométrie.
		▸ Difficultés de lecture graphique.

8.	**Quelles erreurs mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Erreurs de calcul dans les opérations ou avec les fractions. ▸ Erreur due à la procédure : utilisation d'un coefficient additif. ▸ Utilisation de la règle de trois dans une situation non proportionnelle (application inappropriée). ▸ Mise en équation erronée (difficulté de traduction en équation). ▸ Mauvaise compréhension de la propriété de linéarité (additive et multiplicative). ▸ Interprétation incorrecte des représentations graphiques et divers tableaux. ▸ Erreurs de lecture de coordonnées. ▸ Erreurs dans les conversions des différentes unités de mesure, etc.
9.	**Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l'élève peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu'il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Fausse conception de la proportionnalité comme un modèle additif et non multiplicatif. ▸ Conception fausse : augmenter, c'est ajouter. ▸ Insuffisante maîtrise des opérations (notamment la division ou la multiplication). ▸ Insuffisante maîtrise du calcul sur les fractions. ▸ Non-compréhension de la situation (vocabulaire, langue, consigne). ▸ Non-compréhension des liens entre représentation graphique, tableau et les situations. ▸ Application de « règles automatiques » sans avoir le sens.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
10.	**Quels sont les ajustements, les relances, c'est-à-dire les interventions possibles à apporter pour mieux adapter la situation ou l'activité au niveau des élèves ou au programme en vigueur ?**	▸ Donner un enseignement qui part du concret vers l'abstrait. ▸ Travailler sur des situations concrètes et non sur des tableaux de nombres. ▸ Établir le sens (partir d'une situation vécue ou connue par l'élève et qui a du sens). ▸ Ne pas toujours considérer que des situations de proportionnalité. ▸ Faire justifier de l'utilisation de la proportionnalité. ▸ Varier les contextes, les situations. ▸ Renforcer les automatismes de calcul : faire plusieurs exercices d'entraînement. ▸ Proposer différentes techniques de calcul avec leurs avantages et inconvénients. ▸ Encourager les vérifications.
11.	**Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l'élève pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Travailler les liens entre les différentes représentations. ▸ Anticiper les résultats (ordre de grandeur).
12.	**Quels sont les liens que l'élève peut faire avec d'autres concepts mathématiques (vus ou non) au regard des techniques, procédures et approches, en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Rapport, taux. ▸ Calcul de pourcentages. ▸ Fonctions linéaires (et affines). ▸ Les 4 opérations. ▸ Fractions et décimaux. ▸ Équations. ▸ Formules. ▸ Figures semblables. ▸ Théorème de Thalès. ▸ Repérage dans le plan.
13.	**Quelles sont les fausses conceptions que l'élève pourrait avoir en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Toutes les relations fonctionnelles sont des relations de proportionnalité. ▸ Confusion entre situation de proportionnalité et tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité est toujours un entier. ▸ Augmenter c'est ajouter. ▸ Quand on multiplie, le résultat augmente. ▸ L'assimilation de toute fonction affine à une modélisation de situation de proportionnalité.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
14.	**Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement mathématiques en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ Définition de la proportionnalité : dans une situation de proportionnalité il y a deux grandeurs. Si l'on multiplie l'une par 2, 3, etc., on doit pouvoir faire pareil pour l'autre. ▸ Fonction définie par $f(x) = kx$ ou $y = kx$. ▸ Diverses expressions telles que : • « situation de proportionnalité » ; • « tableau de proportionnalité » ; • « coefficient de proportionnalité » ; • « partage proportionnel / inversement proportionnel » ; • « les grandeurs sont proportionnelles » • « … fois plus, … fois moins ».
15.	**Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ Tableau de proportionnalité. ▸ Représentation graphique d'une fonction linéaire.
16.	**Quelles sont les formes langagières ou non langagières qui pourraient être source de difficultés pour l'élève (le signifiant) ?**	▸ Expression « trois fois plus » le « plus » faisant penser à une addition. ▸ « Deux suites sont inversement proportionnelles ».

1.3 Cartographies / continuums

1.3.1 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire à Madagascar

Catégories	Sous-concepts	Niveaux scolaires								
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
Sens et représentation	Identification de situations de proportionnalité et de non-proportionnalité					✗	✗	✗	✗	✗
	Écriture de la relation entre deux grandeurs proportionnelles ($y = ax$)					✗	✗	✗	✗	✗
	Organisation de données dans un tableau de proportionnalité, tableau de valeurs (lire, interpréter et représenter)						✗		✗	
	Représentation graphique d'une relation proportionnelle, fonction linéaire						✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relation)	Propriété des proportions (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens)									✗
	Règle de trois					✗				
	Propriétés additive et multiplicative									
	Relation entre deux grandeurs y et x définie par : $y = ax$					✗	✗	✗	✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Échelle et son utilisation						✗	✗		
	Rendement						✗	✗		
	Pourcentage						✗	✗	✗	✗
	Taux						✗	✗	✗	✗
	Proportion								✗	✗
	Durée, distance ou vitesse							✗		✗
	Rapports								✗	✗

Catégories	Sous-concepts	Niveaux scolaires								
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
Usage et utilisation *(suite)*	Découvrir la forme générale de la règle d'une fonction affine à partir d'une situation de proportionnalité (proportionnalité des écarts)									✗
	Propriétés de Thalès dans un triangle									✗
	Propriétés des triangles semblables									✗
	Notion d'homothétie								✗	
	Rapport d'agrandissement ou de réduction pour calculer des aires et des volumes d'un solide								✗	✗
	Représentation graphique des données statistiques				✗		✗	✗	✗	
	Loi d'Ohm									✗
Propriétés et transformations	Propriété des proportions (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens)									✗
	Linéarité additive									
	Linéarité multiplicative									
Liens avec des domaines mathématiques	Nombres (entiers naturels, nombres décimaux, fractions)						✗	✗		✗
	Opération sur les nombres (addition, soustraction, multiplication et division)						✗	✗		✗
	Algèbre (fonctions linéaires, affines)					✗	✗	✗	✗	✗
	Géométrie et mesure (Thalès, figures semblables, rendements)								✗	✗
	Traitement de données et probabilité (représentation graphique)				✗		✗	✗	✗	

1.3.2 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire (Togo)

Catégorie	Sous-concepts	Niveaux scolaires						
		CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2	6e
Sens et représentation	Situation de proportionnalité (identification)			✗	✗	✗	✗	✗
	Tableau de proportionnalité (organisation de données)			✗	✗	✗	✗	✗
	Coefficient de proportionnalité (compléter et interpréter un tableau)					✗	✗	✗
	Utilisation de graphiques						✗	✗
Techniques opératoires (et relations)	Opérations algébriques			✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs sur les fractions					✗	✗	✗
	Retour à l'unité							✗
	Règle de trois					✗	✗	
	Lecture de graphique					✗	✗	
	Mise en lien de tableau, graphique, formule					✗	✗	
	Recours aux propriétés de linéarité						✗	✗
	Utilisation du coefficient de proportionnalité					✗	✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Agrandissement et réduction d'un dessin			✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de vitesse					✗	✗	✗
	Calculs de masse volumique						✗	✗
	Calculs de débit							✗
	Détermination de dimensions réelles à partir d'une échelle					✗	✗	✗
	Calculs de pourcentages					✗	✗	✗
Propriétés et transformations	Linéarité additive, linéarité multiplicative					✗	✗	✗
	Propriété des proportions					✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	Fractions			✗	✗	✗	✗	✗
	Nombres décimaux			✗	✗	✗	✗	✗
	Repérage dans le plan			✗	✗	✗	✗	✗

1.3.3 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au secondaire (Togo)

Catégorie	Sous-concepts	Niveaux scolaires					
		CM2	6e	5e	4e	3e	2de
Sens et représentation	Situation de proportionnalité (identification)	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Tableau de proportionnalité (organisation de données)	✗	✗	✗	✗	✗	
	Coefficient de proportionnalité (compléter et interpréter un tableau)	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Utilisation de graphiques	✗		✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relations)	Opérations algébriques	✗	✗	✗	✗	✗	
	Calculs sur les fractions	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Retour à l'unité		✗	✗			
	Règle de trois	✗					
	Lecture de graphique	✗		✗	✗	✗	
	Mise en lien de tableau, graphique, formule	✗		✗	✗	✗	✗
	Recours aux propriétés de linéarité	✗	✗	✗			
	Utilisation du coefficient de proportionnalité	✗	✗	✗	✗	✗	
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Agrandissement et réduction d'un dessin	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de vitesse	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de masse volumique	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de débit		✗	✗	✗	✗	
	Détermination de dimensions réelles à partir d'une échelle	✗	✗	✗	✗	✗	
	Calculs de pourcentages, en lien avec une fonction linéaire	✗	✗	✗	✗	✗	
Propriétés et transformations	Linéarité additive, linéarité multiplicative	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Propriété des proportions				✗	✗	✗

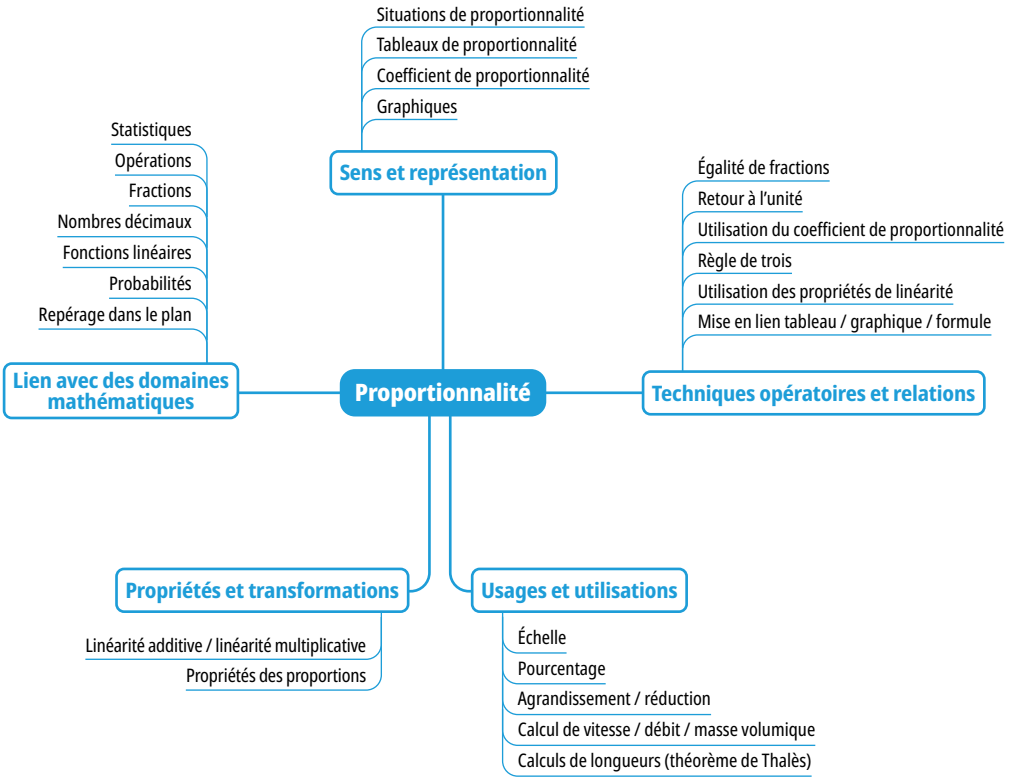
Catégorie	Sous-concepts	Niveaux scolaires					
		CM2	6e	5e	4e	3e	2de
Liens avec des domaines mathématiques	Statistiques				✗	✗	✗
	Fractions	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Nombres décimaux	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Fonctions linéaires					✗	✗
	Probabilité					✗	✗

1.3.4 Cartographie / continuum de l'enseignement de la proportionnalité au primaire et secondaire au Togo (synthèse)

Catégorie	Sous-concepts	NIVEAUX SCOLAIRES										
		CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2	6e	5e	4e	3e	2de
Sens et représentation	Situations de proportionnalité (identification)			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Tableau de proportionnalité (organisation de données)			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Coefficient de proportionnalité (compléter et interpréter un tableau)					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Utilisation de graphiques						✗		✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relations)	Opérations algébriques			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Calculs sur les fractions					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Retour à l'unité					✗		✗	✗			
	Règle de trois					✗	✗					
	Lecture de graphique					✗	✗		✗	✗	✗	
	Mise en lien de tableau, graphique, formule					✗	✗		✗	✗	✗	✗
	Recours aux propriétés de linéarité						✗	✗	✗			
	Utilisation du coefficient de proportionnalité					✗	✗	✗	✗	✗	✗	
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Agrandissement et réduction d'un dessin			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de vitesse					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de masse volumique						✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calculs de débit							✗	✗	✗	✗	

Catégorie	Sous-concepts	NIVEAUX SCOLAIRES										
		CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2	6e	5e	4e	3e	2de
Usage et utilisation *(suite)*	Détermination de dimensions réelles à partir d'une échelle					✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Calculs de pourcentages en lien avec fonction linéaire					✗	✗	✗	✗	✗	✗	
Propriétés et transformations	Linéarité additive, linéarité multiplicative					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Propriété des proportions					✗				✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	Statistiques									✗	✗	✗
	Fractions					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Nombres décimaux					✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Fonctions linéaires, affines										✗	✗
	Probabilité											
	Repérage dans le plan			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Géométrie (théorème de Thalès)			✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗

1.3.5 Carte conceptuelle (synthèse de l'enseignement primaire et secondaire à Madagascar et au Togo)



1.4 Fiche pédagogique

❶ ANALYSE À PRIORI

1. **Quelles sont les intentions didactiques de l'enseignant ?**

   ➜ L'intention de l'enseignant est d'apprendre aux élèves à reconnaître une situation de proportionnalité et à utiliser les tableaux de proportionnalité pour résoudre des problèmes de la vie courante.

2. **Justification de la leçon (au regard du programme et/ou des savoirs) :**

   Il s'agit de consolider les acquis du primaire sur la proportionnalité en améliorant chez l'élève ses capacités à reconnaître les situations de proportionnalité et à utiliser les tableaux de proportionnalité dans la résolution de certains problèmes de la vie courante.

   C'est aussi une préparation pour la classe de cinquième où l'accent sera mis sur des coefficients de proportionnalité particuliers tels que la vitesse, la masse volumique, le débit, les pourcentages et les échelles.

3. **Objectifs visés en termes d'apprentissage :**

   ➜ Reconnaître une situation de proportionnalité.

   ➜ Modéliser des situations de la vie courante par la proportionnalité pour les traiter.

   ➜ Reconnaître un tableau de proportionnalité.

   ➜ Appliquer des propriétés de linéarité ou le coefficient de proportionnalité pour résoudre des problèmes.

4. **Objets d'apprentissage (savoirs et savoir-faire) :**

   - Coefficient de proportionnalité.
   - Propriétés de linéarité.
   - Retour à l'unité, règle de trois.

5. **Prérequis et préalables :**

   - Multiplication et division des nombres réels.
   - Calculs sur les fractions et égalité de fractions.

6. **Ressources (matériels didactiques et pédagogiques) :**

   Matériel individuel : papier, crayon, stylo, calculatrice.

   Matériel collectif : tableau, craie, instruments de construction géométriques.

7. Stratégies d'enseignement (méthodes d'enseignement) :

- Travail individuel.
- Travail en petits groupes.

8. Prise en compte des dimensions genre / inclusive / différence :

Les deux sexes sont pris en compte dans les textes et activités proposés, notamment à travers les choix de noms de garçons et filles et la formation de groupes mixtes.

9. Références bibliographiques spécifiques à la fiche pédagogique :

Cf. encadré en page 46.

10. Anticipation

10.1 Obstacles possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle / a priori

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)
Traitement additif plutôt que multiplicatif.	Montrer l'incohérence des résultats, les proportions ne sont plus respectées.

10.2 Difficultés possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle / a priori

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
Difficultés à reconnaître une situation de proportionnalité.	Variation des exemples de situation de proportionnalité.
Difficultés à trouver la 4e proportionnelle.	Proposer plusieurs méthodes : retour à l'unité, coefficient de proportionnalité, utiliser les propriétés de linéarité.
Difficultés à organiser les données.	Ne pas toujours proposer de tableaux, revenir au sens.

10.3 Erreurs possibles, mathématiques ou didactiques, au regard de l'analyse conceptuelle / a priori

Erreurs anticipées	Actions (processus de remédiation)
Confusion avec les procédures additives.	Proposer des vérifications en lien avec la situation.
Erreurs de calcul.	Exercices de remédiation notamment sur les fractions.

❷ PENDANT ET APRÈS LA CLASSE

Situation d'apprentissage :

À l'occasion de son anniversaire, le jeune Ossan a acheté du pur jus d'orange qu'il sert à ses amis dans des verres de différentes contenances. Ces derniers complètent ensuite le contenu de leurs verres avec de l'eau.

Ossan associe le service à un jeu : *Ceux qui ont un même goût d'orange dans leurs verres s'assoient à une même table.* Sachant que le goût d'orange dans un verre est déterminé par la concentration de jus dans le verre, Ossan relève soigneusement les quantités de pur jus et d'eau servies à chacun. Pour la publication des résultats du jeu, il présente le tableau ci-après :

Noms :	Abou	Diane	Jules	Laré	Ginette	Koffi	Toyi	Adjo	Mana
Quantités de pur jus (en cl) :	12	9	13,2	14	16	11	10	10	15
Quantités d'eau ajoutée (en cl) :	30	27	33	28	32	33	30	25	30

1. Répartis les amis d'Ossan autour des tables prévues à cet effet.
2. Fais un tableau semblable pour les convives de chaque table.
3. Olou, qui arrive à la fin du jeu, reçoit dans son verre 12,5 cl de jus. Il désire s'asseoir à la même table que Mana. Quelle quantité d'eau faut-il ajouter à son jus pour que la règle du jeu soit respectée ?

Stratégies pédagogiques et choix didactiques :

La situation a un intérêt social et mathématique. Les élèves ont acquis au primaire des notions sur la proportionnalité. Ils ont en effet appris à reconnaître de telles situations et en utiliser les caractéristiques pour résoudre des problèmes de vie courante. Ces notions doivent être à présent consolidées par la pratique et la formalisation.

Cette situation d'apprentissage va servir d'activité de démarrage ; elle permettra à l'élève de faire des observations, des conjectures, puis des calculs afin de réorganiser en différents tableaux de proportionnalité, les données qui lui sont fournies. Il est donc attendu des élèves qu'ils entrent dans une démarche d'investigation devant aboutir à une classification des données. Une phase de travail en groupe permettra aux élèves de partager leurs idées et procédures.

Il peut s'avérer nécessaire de clarifier pour ces jeunes élèves, la notion de concentration d'une solution et d'en fournir un exemple de calcul. En s'aidant éventuellement d'une calculatrice, ils mettront en évidence différents rapports de proportionnalité dans cet ensemble de couples de valeurs, et arriver ainsi à déterminer les groupes d'amis à installer autour des tables.

11. Déroulement :

Première séance

Moment didactique et durée	Activités du professeur	Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)	Support de travail, matériel, trace écrite
Remobilisation des prérequis ou évaluation diagnostique (éventuellement) (5 min)	Le professeur évalue s'il doit prévoir une reprise ou un renforcement de certains prérequis.	Des activités de calcul portant sur la multiplication et la division seront proposées si nécessaire.	À choisir par le professeur selon les besoins.
Présentation de la situation (5 min)	1. Le professeur fait lire un élève. 2. Il s'assure que tous les élèves écoutent. 3. Il s'assure que tous les élèves comprennent la notion de concentration.	Des élèves lisent, écoutent et posent des questions.	Énoncé du problème (cf. situation d'apprentissage).
Appropriation de la situation, compréhension de la tâche et de l'organisation du travail (5 min)	Le professeur demande à des élèves : – de préciser les données : *données chiffrées* ; *règle du jeu*. – de reformuler la tâche et les consignes : *répartir les convives autour des tables ; pour ce faire, calculer les rapports entre les volumes de jus et d'eau dans leurs verres, ou leurs inverses*. Le professeur vérifie que les élèves ont compris que *les groupes de convives autour des tables sont constitués de personnes ayant un même quotient de concentration*. Il s'assure que les élèves ont le matériel nécessaire.	1. Les élèves formulent et répondent aux questions du professeur, ils posent des questions. 2. Ils identifient la tâche et doivent comprendre les consignes.	Énoncé du problème (cf. situation d'apprentissage).

Moment didactique et durée	Activités du professeur	Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)	Support de travail, matériel, trace écrite
Résolution du problème (individuellement puis en groupes) ▸ Travail individuel (5 min) ▸ Travail de groupe (15 min)	Le professeur : – précise que chaque élève doit d'abord essayer de résoudre individuellement puis qu'ils doivent échanger leurs avis et propositions, puis élaborer une synthèse ; – contrôle les productions des élèves et les encourage ; – observe et repère les différentes procédures et les difficultés des élèves de manière à organiser la phase de synthèse ; – les oriente si nécessaire sans fournir une solution.	Les élèves résolvent le problème individuellement puis en petits groupes. 1. Ils entrent dans une démarche d'investigation : essais, conjectures, vérification. 2. Ils communiquent entre eux (idées, procédures, etc.), débattent, dégagent une position du groupe sur la procédure et les résultats. 3. Chaque groupe prépare une synthèse de son travail.	▸ Énoncé du problème (cf. situation d'apprentissage). ▸ Matériel de calcul requis : papier, crayon, stylo, calculatrice. Procédures possibles : 1. Calculer tous les quotients jus/eau ou eau/jus et regrouper. 2. Calculer le 1er quotient, l'appliquer aux autres cas pour reconnaître et regrouper ceux qui sont dans le même rapport, puis recommencer avec le 2e, etc.
Synthèse et bilan du travail Travail collectif (20 min)	Le professeur : 1. demande à un groupe de présenter son travail ; 2. instaure les débats ; 3. fait le point.	1. Un élève du groupe présente. 2. Les membres des autres groupes réagissent en prenant position. 3. Les élèves posent des questions. *Différentes procédures sont attendues :* ▸ *Calcul des rapports entre les volumes de jus et d'eau, ou inversement, entre les volumes d'eau et de jus.* ▸ *Identification des personnes ayant obtenu un même rapport comme membres d'un même groupe de convives.* ▸ *Construction de tableaux de proportionnalité.*	Trois groupes se dégagent : **Groupe 1 :** Laré, Ginette et Mana. Leurs volumes de jus et d'eau sont dans le rapport 1 sur 2. Laré 14 → 28 ; Ginette 16 → 32 ; Mana 15 → 30 (× 2) **Groupe 2 :** Abou, Jules et Adjo. Leurs volumes de jus et d'eau sont dans le rapport 1 sur 2,5. Abou 12 → 30 ; Jules 13,2 → 33 ; Adjo 10 → 25 (× 2,5)

Moment didactique et durée	Activités du professeur	Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)	Support de travail, matériel, trace écrite
Synthèse et bilan du travail *(suite)*		▸ *Utilisation du coefficient de proportionnalité pour retrouver le volume d'eau ajouté dans le verre d'Olou.*	**Groupe 3 :** Diane, Koffi et Toyi. Leurs volumes de jus et d'eau sont dans le rapport 1 sur 3. Diane 9 27 ; Koffi 11 33 ; Toyi 10 30 ; × 3 Pour s'asseoir à la même table que Mana, Olou doit verser dans son verre le double du volume de jus qui lui a été servi, soit 25 cl.

Deuxième séance

Moment didactique et durée	Activités du professeur	Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)	Support de travail, matériel, trace écrite
Institutionnalisation (trace écrite de la leçon par le professeur) Travail collectif (15 min)	Le professeur : 1. demande aux élèves de rappeler le contenu de la séance précédente et ce qu'il faut en retenir selon eux ; 2. apprécie les apprentissages construits des élèves ; 3. présente la trace écrite en faisant le lien entre la situation proposée à la séance 1 et les productions des élèves. **Point d'attention** Toute situation de proportionnalité peut être traitée à l'aide d'un tableau de proportionnalité. Cependant l'on peut trouver des tableaux de proportionnalité dont les situations associées ne sont pas des situations de proportionnalité.	Les élèves : – répondent en fonction de leur mémoire et compréhension ; – notent ; – posent des questions.	**Trace écrite** **Situation de proportionnalité** *Définition :* Une situation de proportionnalité est une situation présentant deux grandeurs telles que les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) les valeurs de l'autre par un même nombre réel non nul. *Exemples :* ▸ À la fête d'Ossan, le service de boisson aux convives d'une quelconque des trois tables est une situation de proportionnalité ; ▸ La détermination du prix d'une quantité donnée d'une denrée dont on connaît le prix unitaire est une situation de proportionnalité.

Moment didactique et durée	Activités du professeur	Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)	Support de travail, matériel, trace écrite
Institutionnalisation *(suite)*			**Tableau de proportionnalité** *Définition :* Un tableau de proportionnalité est un tableau dans lequel les nombres d'une ligne sont obtenus en multipliant (ou en divisant) les nombres correspondants de l'autre ligne par un même coefficient non nul. *Exemples :* ▸ Les trois tableaux correspondant aux trois groupes de convives sont des tableaux de proportionnalité. ▸ Le grand tableau initialement élaboré par Ossan n'est pas un tableau de proportionnalité. **Coefficient de proportionnalité** Dans un tableau de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est la valeur correspondant à l'unité. C'est la valeur par laquelle il faut multiplier les données de la première ligne pour obtenir celles correspondantes de la seconde.
Réinvestissement / travaux dirigés (30 min)	Le professeur : **1.** donne des exercices d'application pour : • vérifier l'acquisition des connaissances, • stabiliser les acquis ; **2.** donne des exercices pour consolider les acquis ; **3.** corrige au fur et à mesure ; **4.** note les difficultés éventuelles des élèves en vue d'une remédiation si nécessaire ; **5.** prévoit le travail à la maison.	Les élèves : **1.** résolvent les exercices ; **2.** posent des questions ; **3.** notent.	Exercices diversifiés sur l'ensemble de la leçon ou de la séance : **Exercices d'application :** *CIAM 6e*, page 197, exercices 1.a, 1.b et 1.c. **Exercice de consolidation :** Complète le tableau ci-après : **Nombre de galettes :** 4 | 7 | 15 | 18 **Prix :** (en F CFA) 120 | … | … | … « Il faut 1 kg de farine pour fabriquer 1,250 kg de pain. Quelle masse de farine faut-il utiliser pour faire 120 pains de 150 g chacun ? »

<table>
<tr><th>Moment didactique et durée</th><th>Activités du professeur</th><th>Activités des élèves (tâches et modalités de travail des élèves)</th><th>Support de travail, matériel, trace écrite</th></tr>
<tr><td>Réinvestissement / travaux dirigés
(suite)</td><td></td><td></td><td>Exercices à faire à la maison :
→ CIAM 6e, page 206, exercices 2, 3, 7 et 11.</td></tr>
<tr><td>Remédiation éventuelle en séance</td><td>Le professeur propose des exercices de remédiation selon les résultats du réinvestissement / travaux dirigés.</td><td>Les élèves :
1. résolvent les exercices ;
2. posent des questions ;
3. notent.</td><td>Énoncés des exercices de remédiation :
Détermine le prix d'une galette, puis complète le tableau ci-après :
<table><tr><td>Nombre de galettes :</td><td>4</td><td>8</td><td>14</td><td>17</td></tr><tr><td>Prix : (en F CFA)</td><td>120</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Évaluation (formative)
(10 min)</td><td>Le professeur propose des exercices d'évaluation.</td><td>Les élèves cherchent et résolvent les exercices d'évaluation.</td><td>Exercices d'évaluation :
Qu'est-ce qu'une situation de proportionnalité ? un tableau de proportionnalité, un coefficient de proportionnalité ? Exemples ?
Lequel des tableaux ci-après n'est pas un tableau de proportionnalité ?
Tableau n° 1
<table><tr><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr><tr><td>3</td><td>15</td><td>27</td></tr></table>Tableau n° 2
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Remédiation différée</td><td>Le professeur propose des exercices de remédiation selon les résultats obtenus au cours de l'évaluation.</td><td>Les élèves :
1. résolvent les exercices ;
2. posent des questions ;
3. notent.</td><td>Exercices de remédiation :
→ CIAM 6e, page 207, exercices 14 et 16.</td></tr>
</table>

Références bibliographiques spécifiques à la fiche pédagogique

- **Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse.** (2023). *Programme de l'enseignement de mathématiques (allégé et actualisé), classe de 6e*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale.
- **Collectif.** (1994). *Mathématiques CIAM 6e* (Livret d'activités). Paris : Édicef, Collection Inter-Africaine de Mathématiques.
- **Adihou, A.**, **Butlen, D.** et **Koudogbo, J.** (2023). *Guide pour le(la) formateur(rice) d'enseignant(es) de mathématiques : des outils didactiques pour penser, organiser et lire la classe*. Paris : Agence universitaire de la Francophonie, APPRENDRE, Groupe Thématique d'Expertise 4.
- **Groupe thématique d'expertise 4 (APPRENDRE).** (2023). *Glossaire didactique des mathématiques*. Paris : Agence universitaire de la Francophonie, APPRENDRE.

2 L'enseignement des fonctions linéaires et affines

2.1 Introduction

L'étude des fonctions, thème central en mathématiques, se déroule sur de nombreuses années. On peut d'ailleurs en noter les prémisses bien avant l'enseignement proprement dit préconisé par les programmes.

Nous nous centrons ici sur les fonctions linéaires et affines. Leur étude se situe dans le prolongement du numérique (tableaux de valeurs), de l'algèbre (écriture de formules, résolution d'équations et d'inéquations, de système d'équations), de la proportionnalité (fonctions linéaires), du repérage dans le plan (représentations graphiques) et elle se prolongera à d'autres types de fonctions, ce qui permettra l'entrée dans l'analyse. Il est donc important de bien travailler avec les élèves tous ces liens et de vérifier que les pré-requis sont en place chez les élèves.

2.1.1 Introduction de la notion de fonction

Les travaux de recherche ont distingué deux entrées pour les fonctions :

- Celle de la fonction comme processus de calcul (associé à une formule) qui, à un réel x associe un réel y (correspondance terme à terme souvent illustrée par un diagramme de Venn). Cela correspond à l'image de la boite noire.
- Celle de la covariation, c'est-à-dire une relation de dépendance entre deux grandeurs mettant en lien les variations de l'une avec l'autre.

Selon l'entrée choisie, les problèmes posés aux élèves ne seront pas les mêmes, ce qui pourra entraîner, chez les élèves, des conceptions de la notion de fonctions différentes et complémentaires. Il est donc important que ces deux entrées soient travaillées, y compris avec les fonctions linéaires et affines. Le lien avec des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité dans des contextes de la vie courante ou des mathématiques pourra être un levier pour l'introduction des fonctions par la covariation.

2.1.2 Registres de représentation

Comme les autres objets mathématiques, les fonctions se représentent dans divers registres de représentation. En premier lieu, on pense toujours au registre algébrique (l'expression algébrique de la fonction), mais il y a aussi le registre graphique (la courbe représentative de la fonction) et ceux des tableaux de valeurs et de variation.

Plusieurs points méritent attention. Tout d'abord, dans les exercices et problèmes, il est important de ne pas rester seulement dans un registre (en général, le registre algébrique) et de trouver des situations qui permettent aux élèves de travailler dans différents registres, mais aussi de faire des activités de conversion entre registres. Cela permet de donner du sens au concept et de favoriser les procédures de vérification et de contrôle.

De plus, selon le registre choisi, certaines tâches seront faciles et d'autres difficiles voire impossibles. Par exemple, faire la somme de deux fonctions dans le registre algébrique est facile, mais plus difficile avec les représentations graphiques et peut être impossible avec les tableaux de valeurs. Là encore, il faut travailler ces aspects avec les élèves, ce qui leur permettra d'être plus à l'aise, face à un problème, pour choisir quelle représentation est plus pertinente et pour engager des processus de vérification.

Enfin les fonctions sont des outils de modélisation de situations diverses. Il est donc essentiel que des problèmes consistants soient proposés aux élèves pour qu'ils mobilisent la notion de fonction dans des problèmes et pas seulement dans des tâches techniques.

2.2 Analyse conceptuelle de l'enseignement des fonctions numériques

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
1.	**Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (la référence) ?**	▸ Activités / situations qui permettent de mettre en évidence le sens de : relation, fonction, application, covariation. ▸ Comparer des situations (de prix, de vitesse, etc.). ▸ Déterminer l'expression explicite d'une fonction (par ex. débit, échelle, vitesse moyenne, prix). ▸ Déterminer un maximum, un minimum. ▸ Déterminer si trois points sont alignés ou non. ▸ Déterminer si un point est sur une droite. ▸ Étude du parallélisme ou de la perpendicularité de droites dans le plan.
2.	**Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Calculs d'image, d'antécédent, détermination de l'ensemble de définition. ▸ Notion de variable. ▸ Variations, *extremum*. ▸ Coefficient directeur et pente d'une droite. ▸ Vecteur directeur. ▸ Existence d'un ou de plusieurs antécédents pour un nombre donné. ▸ Tracer une droite à partir de l'expression de la fonction. ▸ Trouver l'équation d'une droite à partir de 2 points ou 1 point et le coefficient directeur. ▸ Trouver l'équation d'une droite à partir d'une lecture graphique. ▸ Appartenance d'un point à une droite. ▸ Recherche des coordonnées du point d'intersection de droites. ▸ Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation du premier degré.
3.	**Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Calculatrice. ▸ Logiciels de maths (par exemple GéoGébra). ▸ Tableau de valeurs. ▸ Représentations graphiques.
4.	**Quelles difficultés ces ressources (matérielles ou autres) ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques ou contextuelles) choisies peuvent-elles amener ?**	▸ Non-familiarité avec le logiciel. ▸ Erreurs de calculs si la calculatrice n'est pas scientifique. ▸ Si le placement des valeurs est très dispersé, difficulté sur la représentation graphique.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
5.	**Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l'élève et sur lesquelles reposerait l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ?**	▸ Calculs numériques pour déterminer par exemple des images, des coordonnées de points. ▸ Résolution d'équations pour déterminer par exemple un antécédent, des coordonnées de points. ▸ Résolution de systèmes d'équations pour trouver l'intersection de deux droites. ▸ Utilisation d'un tableau de valeur pour tracer la représentation graphique d'une fonction. ▸ Utilisation du tableau de variation pour estimer une valeur ou un résultat. ▸ Détermination de l'équation d'une droite à partir de deux points, ou d'un point et le coefficient directeur, ou à partir du graphique. ▸ Lecture de coordonnées sur un graphique, du coefficient directeur.
6.	**Quels raisonnements mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Inductif (du particulier au général). ▸ Conjecture, approximation, essai, vérification. ▸ Par analogie avec des situations similaires. ▸ Déductif (généralisation) et démonstration. ▸ Démarche expérimentale (observation, hypothèse, expérimentation, etc.).
7.	**Quelles difficultés peuvent être révélées chez l'élève au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Difficultés de calculs avec fractions, décimaux, relatifs, etc. ▸ Difficultés dans le calcul littéral. ▸ Difficulté à exprimer une formule (distinction variable et constante). ▸ Difficultés de lecture graphique. ▸ Difficultés dans la résolution d'équations, d'inéquations. ▸ Difficultés pour interpréter « en fonction de ... ».
8.	**Quelles erreurs mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Erreurs de calcul numérique. ▸ Erreurs de calcul littéral. ▸ Erreurs dans le placement des points ou la lecture de coordonnées pour la construction de droites (confusion entre abscisse et ordonnée). ▸ Confusion image / antécédent dans l'expression de la fonction ou sur la représentation graphique. ▸ Associer tout tableau de valeurs à la proportionnalité.
9.	**Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l'élève peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu'il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Mauvaise conceptualisation de la notion de fonction (covariation). ▸ Conception erronée de la notion de variable. ▸ Conception erronée de l'écriture $f(x)$. ▸ Maîtrise algébrique insuffisante. ▸ Non-familiarité avec le logiciel et / ou l'usage de la calculatrice. ▸ Prégnance trop forte de la proportionnalité.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
10.	**Quels sont les ajustements, les relances, c'est-à-dire les interventions possibles à apporter pour mieux adapter la situation ou l'activité au niveau des élèves ou au programme en vigueur ?**	▸ Proposer des problèmes dans lesquels interviennent les fonctions avec l'idée de variation et de covariation. ▸ Proposer des activités ou des situations dans lesquelles les termes *image* et *antécédent* sont mobilisés. ▸ Développer l'usage d'une calculatrice scientifique. ▸ Faire le lien entre proportionnalité et fonctions linéaires. ▸ Pour les fonctions affines, faire le lien avec proportionnalité des accroissements. ▸ Proposer des activités sur les priorités des opérations dans une expression algébrique. ▸ Favoriser les liens entre les différents registres de représentation.
11.	**Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l'élève pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Vérification numérique de la solution d'équations. ▸ Vérification graphique de la solution d'équations ou d'inéquations. ▸ Liens entre l'allure d'une droite et le signe du coefficient directeur. ▸ La variation relative d'une fonction affine entre deux valeurs quelconques est constante.
12.	**Quels sont les liens que l'élève peut faire avec d'autres concepts mathématiques (vus ou non) au regard des techniques, procédures et approches, en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Proportionnalité (débit, vitesse, pourcentage, échelle). ▸ Équations et inéquations. ▸ Calculs numériques avec différents types de nombres. ▸ Repérage dans le plan (abscisse et ordonnée). ▸ Vecteurs du plan. ▸ Autres fonctions.
13.	**Quelles sont les fausses conceptions que l'élève pourrait avoir en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Il n'y a pas de représentation graphique autre que les droites. ▸ Toutes les droites passent par l'origine. ▸ Un coefficient directeur est obligatoirement un nombre entier ou un nombre décimal. ▸ Toute fonction est continue. ▸ Si un nombre a un antécédent, celui-ci est unique. ▸ Toute fonction croissante est positive et toute fonction décroissante est négative. ▸ Tout tableau est un tableau de proportionnalité.
14.	**Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement mathématiques en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ En fonction de … ▸ Image, antécédent. ▸ Variable et inconnue. ▸ Variation.

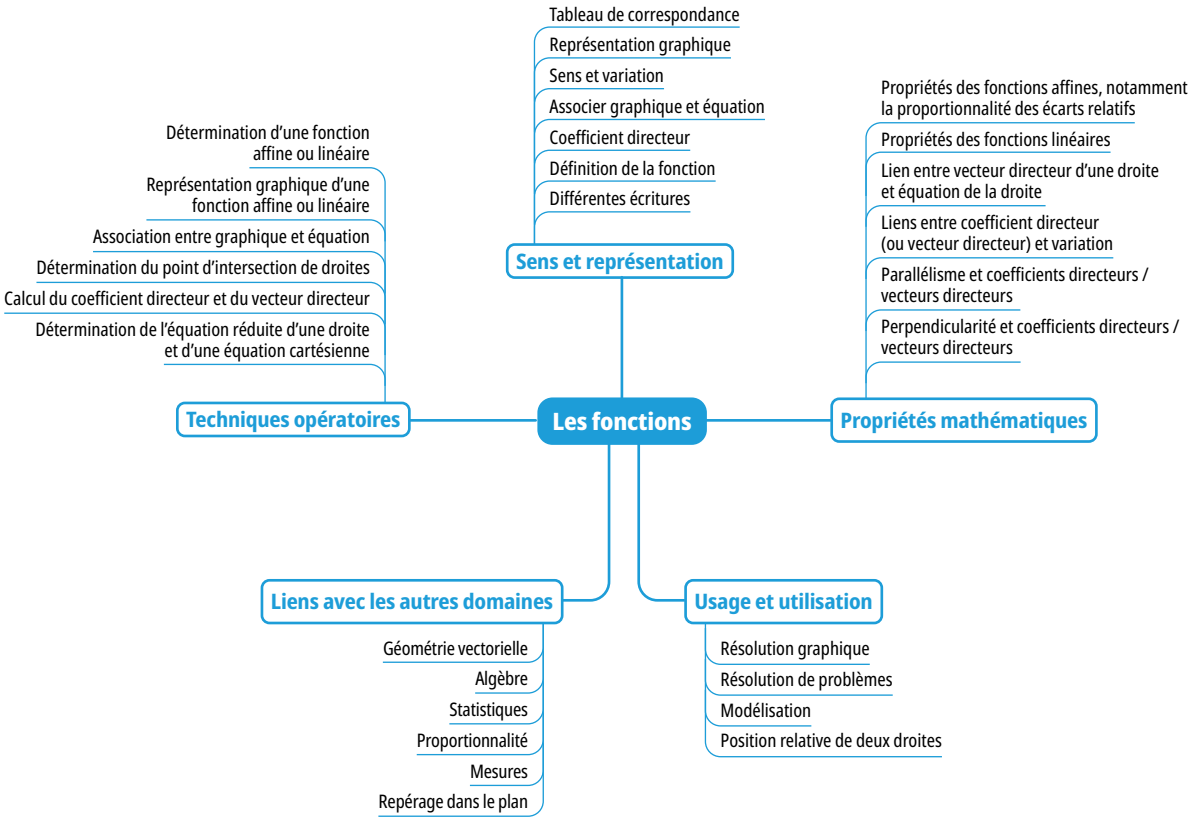
N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
15.	**Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ Dessins (pour symboliser une correspondance). ▸ Tableaux de valeurs. ▸ Tableaux de variation. ▸ Égalités : écriture fonctionnelle (exemple : $f(x) = 2x + 1$ ou $y = 2x + 1$). ▸ Correspondance entre antécédent et image en lien avec la notation $x \rightarrow f(x)$.
16.	**Quelles sont les formes langagières ou non langagières qui pourraient être source de difficultés pour l'élève (le signifiant) ?**	▸ L'écriture « $f(x) = \ldots$ » (penser que c'est f fois x). ▸ Repère orthogonal, abscisse et ordonnée (lecture image et antécédent).

2.3 Cartographie / continuum de l'enseignement des fonctions linéaires et affines (Madagascar)

Catégorie	Sous-concepts	NIVEAUX SCOLAIRES						
		6e	5e	4e	3e	2de	1re	Tle
Sens et représentation	Différentes écritures d'une fonction $f(x)$				✗	✗	✗	✗
	Définition de la fonction affine				✗	✗	✗	✗
	Définition de la fonction linéaire				✗	✗	✗	✗
	Image et antécédent				✗	✗	✗	✗
	Tableau de correspondance (de valeurs)		✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Coefficient directeur et ordonnée à l'origine, vecteur directeur				✗	✗	✗	✗
	Sens de variation				✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relations)	Déterminer l'expression d'une fonction affine ou linéaire				✗	✗	✗	✗
	Représenter graphiquement une fonction affine ou linéaire		✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Associer graphique – équation de droite et vice-versa				✗	✗	✗	✗
	Trouver le point d'intersection de deux droites				✗	✗	✗	✗

Catégorie	Sous-concepts	NIVEAUX SCOLAIRES						
		6e	5e	4e	3e	2de	1re	Tle
Techniques opératoires (et relations) *(suite)*	Calcul du coefficient directeur et du vecteur directeur				✗	✗	✗	✗
	Déterminer une équation cartésienne d'une droite, déterminer une équation réduite d'une droite				✗	✗	✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Utilisation de fonctions pour la proportionnalité, les vitesses, les prix, etc.				✗	✗	✗	✗
	Déterminer les positions relatives de deux droites				✗	✗	✗	✗
	Reconnaître qu'un point appartient à une droite ou pas				✗	✗	✗	✗
	Résoudre des problèmes se ramenant à des systèmes d'équations et / ou des inéquations du premier degré			✗	✗	✗	✗	✗
	Résolution graphique de système d'équations ou d'inéquations linéaires				✗	✗	✗	✗
Propriétés et transformations	▸ Propriétés des fonctions affines notamment proportionnalité des écarts relatifs ▸ Propriétés des fonctions linéaires				✗	✗	✗	✗
	Liens entre coefficient directeur ou vecteur directeur et variation				✗	✗	✗	✗
	Liens entre parallélisme, coefficients directeurs et vecteurs directeurs				✗	✗	✗	✗
	Liens entre orthogonalité, coefficients directeurs et vecteurs directeurs				✗	✗	✗	✗
	Liens entre le vecteur directeur d'une droite et son équation				✗	✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	Géométrie vectorielle				✗	✗	✗	✗
	Algèbre			✗	✗	✗	✗	✗
	Proportionnalité	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Mesure	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Statistiques				✗	✗	✗	✗
	Repérage dans le plan		✗	✗	✗	✗	✗	✗

2.4 Carte conceptuelle de l'enseignement des fonctions (Madagascar)



SECONDE PARTIE

Pré-algèbre et algèbre : notion d'égalité / relation d'égalité

1 Introduction

Le chapitre présente les ressources co-produites sous la direction d'Adolphe Adihou, professeur titulaire à l'Université de Sherbrooke, par le groupe de travail associé aux webinaires de renforcement des compétences en didactique des mathématiques du GTE 4, composé des représentants de Djibouti et de la Côte d'Ivoire.

Pour ce faire, nous présentons d'abord le contexte de coproduction des ressources. Ensuite nous exposons le thème de l'égalité ou la relation d'égalité dont traitent les ressources et outils produits, ainsi que quelques indications de recherches en didactique des mathématiques sur son enseignement. Nous expliciterons ainsi la place de l'égalité ou la relation d'égalité dans les programmes d'étude des deux pays concernés. Enfin, des exemples de ressources pour l'enseignement seront présentés. Une conclusion suit la présentation et la description de ces ressources.

1.1 Contexte de coproduction de ressources pour l'enseignement des mathématiques

La production a été initiée par une approche de co-construction qui vise à contextualiser des pratiques autour de l'égalité ou la relation d'égalité dans l'enseignement des mathématiques à Djibouti et en Côte d'Ivoire. Les ressources mettent en évidence et cernent des problématiques autour des situations mathématiques dans lesquelles interviennent l'égalité et la relation d'égalité, par exemple, les différents sens de la relation d'égalité, mais aussi et surtout comment les trois propriétés de la relation d'égalité (Réflexivité, Symétrie, Transitivité) s'opérationnalisent implicitement dans la construction du sens d'autres concepts. Dans ces ressources, la relation d'égalité a été traitée sous trois aspects essentiels. Le premier concerne, le choix des situations d'introduction et de réalisation justifiant l'usage et la place du signe d'égalité dans la transformation d'objet mathématique et la recherche d'expressions équivalentes. Le deuxième est en rapport avec les propriétés de la relation d'égalité qui sont utilisées de manière implicite. Les formes que prennent l'égalité et les difficultés qui y sont rattachées. Le troisième est lié au statut de leur usage en tant qu'outil (implicite), sans jamais devenir objet du savoir constitué ou institué (au regard des programmes), qui demeure un outil explicite (Douady, 1986) au service d'autres concepts.

1.2 Présentation du thème

Le thème travaillé est la relation d'égalité. L'égalité ou la relation d'égalité ne figurent pas explicitement dans les programmes du primaire et du secondaire de plusieurs pays africains francophones. Toutefois la relation d'égalité intervient dans l'étude de plusieurs notions et concepts mathématiques. Bien que les trois propriétés (Réflexivité, Symétrie, Transitivité qui structurent la relation d'égalité comme relation d'équivalence) soient convoquées dans le cadre des opérations arithmétiques, des décompositions et des recompositions en des expressions numériques et algébriques, ainsi que dans le traitement des équations et de leur résolution et dans le cadre des transformations, etc., elles ne sont pas évoquées explicitement en tant qu'objet d'enseignement, alors que les propriétés de la relation d'égalité sont des objets d'études et des outils explicites au cœur du développement de la pensée algébrique.

En effet, s'il a été assez facile de produire une analyse conceptuelle ou une carte conceptuelle, en revanche les cartographies/continuums et les fiches pédagogiques ont nécessité des analyses approfondies afin de mieux faire ressortir le concept choisi et de le mettre en évidence dans les ressources.

Ainsi cet implicite peut donner l'impression que dans les ressources retenues dans ce chapitre les contextes et les thèmes prennent le pas sur l'égalité ou la relation d'égalité et qu'elles portent plutôt sur d'autres domaines en mathématique (comme la mesure).

Par ailleurs, la distinction entre le signe égal et la relation d'égalité n'est souvent pas faite dans l'enseignement et dans les ressources pédagogiques et didactiques, de même certains manuels confondent égalité et équation. Si le traitement des équations amène les élèves à utiliser les propriétés de la relation d'équivalence (sans qu'ils et elles ne le sachent explicitement) et le signe d'égalité, certains enseignants les ignorent et confondent même relation d'égalité et signe d'égalité d'une part et d'autre part égalité et équation. Ces observations et constats précédents relèveraient des significations diverses du signe « = » en lien avec les difficultés de symbolisation lors de la mise en équation ou de la mathématisation d'un problème écrit ou encore de la modélisation d'une situation-problème. Dans leurs recherches, De Champlain *et al.* (1996) décrivent l'égalité comme « une relation entre deux représentations d'un même objet mathématique. Deux types de conception du signe d'égalité, celui arithmétique et celui algébrique, sont mis en évidence dans les activités. » (De Champlain, Mathieu, Patenaude, Tessier, 1996). La coexistence de ces conceptions crée des difficultés, car les élèves n'acceptent pas par exemple des équations du type $3 = 2x + 5$ ou des égalités du type $2 \times 4 = 3 + 5$. Fischer, Sander, Sensevy, Vilette et Richard (2019) décrivent le signe d'égalité comme un indicateur d'équivalence. À ce propos, Passaro (2019, p. 25) précise que « la simple propriété de symétrie n'est pas si triviale pour des élèves du primaire qui voient le signe d'égalité comme l'indication d'un calcul à effectuer de la gauche vers la droite ».

La conception limitée du signe d'égalité constitue par la suite un obstacle pour l'apprentissage de l'algèbre puisque les manipulations algébriques sont basées sur l'équivalence entre les deux côtés de l'égalité. Carpenter *et al.* (2005) indiquent que cette façon de concevoir l'égalité est à l'origine d'erreurs fréquentes lors de la complétion d'une équation du type 8 + 4 = … + 5. Certains élèves complètent avec 12 puisque 8 + 4 = 12. D'autres indiquent 17 puisqu'ils ajoutent ensuite 5 à 12. Ils comprennent ainsi qu'ils doivent opérer de gauche à droite (Passaro, 2019). Cela rejoint les résultats des travaux d'Adihou (2010 ; 2011) qui montrent que les difficultés des élèves peuvent être interprétées en termes d'obstacle didactique en lien avec les conceptions du signe d'égalité, en arithmétique et en algèbre et dans d'autres domaines des mathématiques, mais aussi en lien avec le symbolisme. Il précise que le signe et la relation d'égalité que l'on considère naturels dans certaines activités de transformation ne sont pas si simples qu'on le croirait.

Si, pour Vergnaud (1990), un concept est un triplet de trois ensembles (S, I, L) — où S désigne les situations dans lesquelles le concept fonctionne, I les invariants opératoires et L les formes langagières et non langagières —, notre analyse vise à cerner le contour de cet objet emblématique : l'égalité ou la relation d'égalité.

1.3 Que révèlent les programmes d'études ?

L'analyse des programmes a permis de mettre en évidence et d'identifier les contenus qui font référence au concept d'égalité en vue de faire ressortir des traces (ou des marques) de la convocation de la relation d'égalité et du signe d'égalité dans des activités où ces notions ne sont pas explicitées et n'ont pas le statut d'objet explicite d'enseignement et d'apprentissage. Leur statut est celui d'outil implicite dans l'apprentissage et l'enseignement d'autres concepts appartenant à plusieurs domaines mathématiques. C'est aussi le cas pour les programmations proposées sur plusieurs années au primaire et au secondaire.

Comme le mentionne Adihou (2011), l'analyse de certaines activités au primaire et au secondaire, mettant en évidence les relations d'égalité, fait ressortir les propriétés de la relation d'équivalence : réflexivité, symétrie et transitivité, ainsi que les propriétés de régularité des opérations[1], c'est-à-dire les opérations de traitement des égalités ou des équations. Ces propriétés sont souvent implicites et apparaissent comme implicites, naturelles ou naturalisées. L'exemple suivant illustre notre propos. Pour résoudre par la méthode de comparaison le système d'équations formé par $3x - y = -1$ et $2x - y = -5$, on écrit $y = 3x + 1$ et $y = 2x + 5$. La transitivité permet de poser l'équation à une inconnue : $3x + 1 = 2x + 5$. Les propriétés de régularité des opérations permettent de partir

1 Additionner ou soustraire ou multiplier ou diviser un même nombre (différent de 0 pour la division) aux deux membres d'une égalité conserve l'égalité.

de $3x + 1 = 2x + 5$ pour obtenir $3x + 1 - 1 = 2x + 5 - 1$ et ensuite $3x - 2x = 2x - 2x + 4$ et enfin d'en déduire que $x = 4$. Ensuite, on calcule en substituant 4 dans une des équations pour trouver $y = 13$.

Ce phénomène (*c'est-à-dire, considérer les propriétés de l'égalité implicites, naturelles ou naturalisées*) est présent dans tous les domaines mathématiques. L'égalité ou la relation bien qu'étant un objet mathématique en soi est au service de tous les domaines. Il en est ainsi en arithmétique lors de l'identification des fractions équivalentes ou en mesure lors de la conversion des mesures. Les propriétés de l'égalité devraient être introduites et mentionnées explicitement dans les programmes.

2 Ressources pour l'enseignement de la relation d'égalité

Les ressources coproduites comprennent, une analyse conceptuelle unifiée, une carte conceptuelle unifiée, deux cartographies/continuums des programmes d'études (celle du secondaire de Djibouti et celle du primaire de la Côte d'Ivoire), ainsi que deux fiches pédagogiques. La première fiche de Djibouti concerne « Les équations équivalentes dans la résolution des équations du premier degré » au secondaire et la seconde fiche porte sur la « Relation d'égalité et conversion des mesures de longueur » au primaire de la Côte d'Ivoire.

2.1 Analyse conceptuelle de l'enseignement de la relation d'égalité

L'analyse conceptuelle permet d'explorer les trois composantes du concept : la référence (les situations), le signifié (les invariants opératoires), le signifiant (les formes langagières ou non langagières (Vergnaud, 1991).

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
1.	**Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (la référence) ?**	▸ Des situations de comparaison du cardinal de collections ou d'assemblage de collections. ▸ Des situations d'égalité de différentes écritures d'un nombre. (Attention à ces genres d'égalités « 54 = cinquante-quatre » présents dans certains manuels). ▸ Des situations d'échanges basées sur le groupement de 10. ▸ Des situations de conversion ou de transformation d'écritures ▸ Des situations d'égalités des mesures d'une grandeur (équilibre d'une balance, des récipients différents, mais de contenances égales, des égalités d'aires et des périmètres, etc.). ▸ Des situations d'écritures de fractions ou de quotients égales. ▸ Des situations de transformation (produit en croix ou quatrième proportionnelle). ▸ Des situations d'égalités d'expressions numériques ou littérales (identité remarquable, développement, réduction, etc., pour trouver des expressions équivalentes). ▸ Des situations de résolution d'équations à une ou deux inconnues (situation équationnelle ou d'égalité lacunaire, ou de termes manquants). ▸ Des situations de transformation d'expressions algébriques. ▸ Des résolutions d'équations par comparaison, substitution, etc.
2.	**Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Équivalence de collections. ▸ Les différentes écritures d'un nombre. ▸ Équivalence des écritures additives. ▸ Comparaison des mesures de grandeur avec des unités différentes. ▸ Simplification des écritures fractionnaires. ▸ Propriétés mathématiques de transformation pour le calcul de la quatrième proportionnelle. ▸ Résolution d'équation. ▸ Priorités des opérations. ▸ Propriétés de la relation d'égalité souvent implicite dans les situations qui traitent de l'égalité.
3.	**Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?**	▸ Des matériels pour former des collections. ▸ Des matériels de représentation de la numération. ▸ Des quadrillages pour mettre en évidence les comptages de longueurs des pavés pour trouver la longueur du périmètre et le nombre des pavés pour la surface. ▸ Tableau de proportionnalité pour mettre en évidence la quatrième proportionnelle. ▸ Des outils de mesure de grandeurs. ▸ Des matériels de schématisation des situations-problèmes.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
4.	**Quelles difficultés ces ressources (matérielles ou autres) ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques ou contextuelles) choisies peuvent-elles amener ?**	▸ Difficultés liées au choix de matériels pour représenter les échanges en base 10. ▸ Difficultés de choix d'objet à comparer lors de la découverte des outils de mesure de grandeur. ▸ Difficultés liées au choix de type d'outils de mesure de grandeur. ▸ Difficultés de prise en compte des contraintes de la consigne dans une activité ou dans une situation. ▸ Contraintes liées au choix de technique de résolution d'équation.
5.	**Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l'élève et sur lesquelles reposerait l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ?**	▸ Technique de correspondance terme à terme. ▸ Introduction aux systèmes décimal et sexagésimal, et au système horaire. ▸ Procédure d'équivalence d'une mesure de grandeur (balance de Roberval, etc.). ▸ Procédures d'utilisation du calcul avec un produit en croix. ▸ Traduire une situation en une égalité qui comporte une ou plusieurs inconnues. ▸ Technique de résolution d'équation à une ou plusieurs inconnues (comparaison, substitution, combinaison, etc.) en vue de trouver des équations équivalentes.
6.	**Quels raisonnements mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Mener un raisonnement par déduction pour établir une égalité ou une équivalence. ▸ Mener un raisonnement par analogie pour établir une égalité ou une équivalence. ▸ Mener un raisonnement par induction ou par récurrence pour établir une égalité ou une équivalence.
7.	**Quelles difficultés possibles peuvent être révélées chez l'élève au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Difficultés d'ordre procédural (la technique de correspondance terme à terme n'est pas bien saisie). ▸ Difficultés d'ordre conceptuel (le système décimal n'est pas si évident pour tous les élèves). ▸ Difficultés d'ordre « contrat didactique » (le choix des objets à comparer n'est pas bien réfléchi). ▸ Difficultés d'ordre procédural (dans le produit en croix, les deux opérations sollicitées en même temps risquent d'être un obstacle). ▸ Difficultés d'ordre langagier (le contexte de la situation-problème n'est pas compris). ▸ Difficultés d'ordre « surcharge cognitive » (lorsqu'il y a trop de données dans la situation-problème). ▸ Difficultés en lien avec l'adéquation du type de technique de résolution choisie. ▸ Difficultés liées au sens des lettres et des symboles.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
8.	**Quelles erreurs mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Erreur de calcul dans les opérations à effectuer. ▸ Erreur de l'utilisation des propriétés des opérations dans la réduction des expressions pour trouver une expression équivalente (cas des erreurs de concaténation). ▸ Erreur d'interprétation des consignes, des données pour une mise en équation. ▸ Erreur dans l'articulation des différentes étapes de résolution d'équation.
9.	**Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l'élève peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu'il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Causes liées aux apprentissages antérieurs sur les opérations, par exemple dans l'utilisation de la priorité des opérations. ▸ Causes d'ordre épistémologique en lien avec le sens des objets mathématiques comme le sens de l'égalité, le sens du zéro. ▸ Causes d'ordre « contrat didactique » (*l'âge du capitaine*).
10.	**Quels sont les ajustements, les relances, c'est-à-dire les interventions possibles à apporter pour mieux adapter la situation ou l'activité au niveau des élèves ou au programme en vigueur ?**	▸ Remédiations aux lacunes antérieures sur les opérations en proposant des activités traitant des contenus en cause. ▸ Proposer des reformulations par le résolveur. ▸ Proposer des contextes liés à l'environnement des élèves. ▸ Varier les types des situations-problèmes.
11.	**Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l'élève pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?**	▸ Procéder par analogie avec une procédure et approche étudiée antérieurement. ▸ Procéder par estimation avec une procédure et approche étudiée antérieurement.
12.	**Quels sont les liens que l'élève peut faire avec d'autres concepts mathématiques (vus ou non) au regard des techniques, procédures et approches, en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Liens sur les techniques de comptage simple pour comparer des collections. ▸ Liens avec l'utilisation de coefficient de proportionnalité. ▸ Liens avec les situations-problèmes simples (sans inconnue). ▸ Établir un lien avec les expressions numériques pour trouver la valeur cherchée (une dépense totale, un reste, une part, etc.). ▸ Liens avec des situations mathématiques qui traitent des différents sens de l'égalité.

N°	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
13.	**Quelles sont les fausses conceptions que l'élève pourrait avoir en lien avec le concept à l'étude ?**	▸ Le signe d'égalité est utilisé pour trouver la réponse d'un calcul. (L'égalité annonce un résultat). ▸ Le signe d'égalité invite à avoir les mêmes expressions des deux côtés de l'égalité.
14.	**Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement mathématiques en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ Verbalisation des situations-problèmes nécessitant une égalité par des mots en lien avec des équivalences, des équipotentes ou des relations d'égalités. ▸ Équivalence logique. ▸ Équations.
15.	**Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?**	▸ Représentation concrète avec des matériels de manipulation. ▸ Représentation semi-concrète de collections ou d'équivalences d'outils de mesure de grandeurs. ▸ L'utilisation du signe égal. ▸ Des expressions littérales qui représentent des égalités. ▸ La représentation symbolique de la réflexibilité.
16.	**Quelles sont les formes langagières ou non langagières qui pourraient être source de difficultés pour l'élève (le signifiant) ?**	▸ Les égalités comportant des inconnues sont sources de difficultés pour une majorité d'élèves. ▸ Les équations symboliques de certains types d'équations, par exemple : $0x = 0$; $0x = 7$; $4 = 6x$; etc. ▸ Le passage d'une forme textuelle à une forme équationnelle avec l'usage du signe égal (mise en équation).

2.2 Cartographies / continuums pour l'enseignement de la relation d'égalité

2.2.1 Cartographie / continuum pour l'enseignement de la relation d'égalité au secondaire à Djibouti

			NIVEAUX SCOLAIRES				
Catégorie	**Sous-concepts**	**Illustrations dans les programmes**	**6e**	**5e**	**4e**	**3e**	**2de**
Sens et représentation	Sens de l'égalité et symbole d'égalité	▸ Le signe égal pour montrer l'équivalence des différentes formes d'écriture des nombres ou des expressions littérales. ▸ Le signe égal pour désigner le résultat d'une opération. ▸ Montrer qu'une égalité est vraie (tester une égalité).	✗	✗	✗	✗	✗
	Connaître des équivalences	Connaître et utiliser l'équivalence $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.	✗	✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relation)	Techniques de décomposition des nombres (entiers, décimaux ou fractionnaires)	▸ Décomposer un nombre décimal : $23{,}042 = 23 + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} = 23 + \frac{42}{1000}$. ▸ Donner plusieurs écritures d'une fraction. ▸ Relation d'égalité pour identifier les diviseurs communs de deux entiers pour trouver le PGCD.	✗	✗	✗	✗	✗
	Relations d'égalité en géométrie	▸ L'inégalité triangulaire aboutit à une relation d'égalité dans le cas du triangle aplati. ▸ Relation d'égalité des rapports du théorème de Thalès. ▸ Relation d'égalité entre une médiane relative à l'hypoténuse. ▸ Relations d'égalité en trigonométrie : $\cos\alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$; $\sin\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$; $\tan\alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. ▸ Relation d'égalité du théorème de Pythagore. ▸ Relation d'égalité d'angles dans le cas de la bissectrice. ▸ Relation d'équidistance dans le cas de la médiatrice.	✗	✗	✗	✗	✗
	Technique résolution d'équation	▸ Résoudre une équation du 1er degré. ▸ Résoudre une équation du type $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. ▸ Résoudre les équations du type $x^2 = a$. ▸ Résoudre les équations du type $A(x) \times B(x) = 0$. ▸ Résoudre algébriquement un système de deux équations à deux inconnues.	✗	✗	✗	✗	✗

Catégorie	Sous-concepts	Illustrations dans les programmes	NIVEAUX SCOLAIRES 6e	5e	4e	3e	2de
Techniques opératoires (et relation) *(suite)*	Technique de réduction de fraction ou d'expression littérale	▸ Technique de réduction des expressions numériques de somme ou de soustraction des nombres relatifs (en utilisant la règle de priorité d'opération). ▸ Technique de simplification multiplicative ou par division pour rendre une fraction irréductible.	✗	✗	✗	✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Situation de décomposition	▸ Situation de décomposition pour comparer des nombres décimaux. ▸ Situation de décomposition des nombres décimaux en puissance de 10.	✗	✗	✗	✗	✗
	Utiliser l'égalité pour faire des relations en proportionnalité ou en statistique	▸ Utiliser différentes écritures de fréquences : $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ ou 40 %. ▸ Situation de calcul de la quatrième proportionnelle à l'aide des calculs inverses ou un rapport de linéarité.	✗	✗	✗	✗	✗
	Situation de transformation d'une expression numérique ou littérale	▸ Connaître et utiliser la distributivité et les identités remarquables pour le développement et factorisation des expressions littérales. ▸ Connaître et utiliser les égalités en trigonométrie dans un triangle rectangle. ▸ Connaître et utiliser les égalités des rapports dans une situation de Thalès.			✗	✗	✗
		▸ Connaître et utiliser les égalités opératoires et leurs vocabulaires (somme, différence, produit, quotient, dividende, etc.). ▸ Situation de transformation des égalités à l'aide des règles des puissances. ▸ Connaître et utiliser l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.		✗	✗	✗	✗
		▸ Situation de transformation d'expression numérique dans le cas de calcul additif ou soustractif de nombres relatifs.		✗	✗	✗	✗
	Établir des conversions (pour établir des égalités de mesures)	▸ Situation de conversion d'unités de longueur en unités agraires. ▸ Situation de conversion de litres en m^3. ▸ Situation de conversion en lien avec la vitesse ($d = V \times t$).		✗	✗	✗	✗
	Situation de résolution d'équation	▸ Situation de résolution d'équations de 1er degré. ▸ Situation de résolution d'équations à deux inconnus. ▸ Situation de résolution d'équations pour déterminer l'antécédent d'image donnée d'une fonction affine.			✗	✗	✗

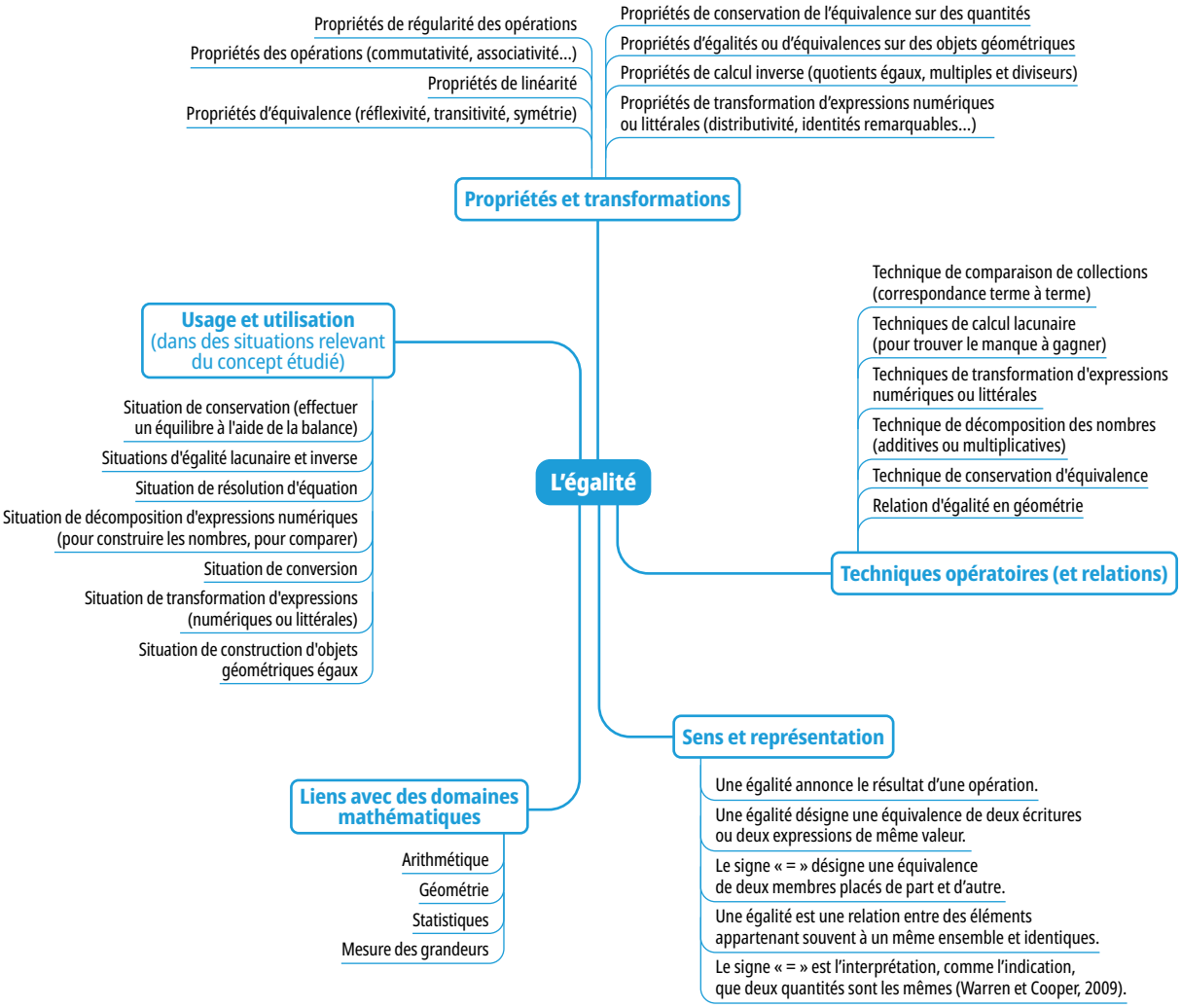
Catégorie	Sous-concepts	Illustrations dans les programmes	NIVEAUX SCOLAIRES 6e	5e	4e	3e	2de
Propriétés et transformations	Propriétés et transformations sur les égalités	▸ Propriété sur la résolution des équations : $x^2 = a$; $A(x) \times B(x) = 0$ ou de compensation. ▸ Propriété de transformation des écritures en puissance.			✗	✗	✗
	Effectuer des conversions	▸ Convertir des mesures agraires et des volumes. ▸ Convertir des m/s en km/h.	✗	✗	✗	✗	✗
	Propriétés d'égalités en géométrie et en mesure	▸ Propriété d'égalité de côtés et d'angles relatifs aux parallélogrammes (particuliers). ▸ Propriétés d'égalité des angles formés par deux droites parallèles et une sécante (angles alternes-internes, correspondants, opposés par leur sommet, etc.). ▸ Propriétés d'équivalence à un angle droit ou un angle plat pour les cas d'angles complémentaires ou supplémentaires. ▸ Propriété d'égalité sur la somme des valeur d'angles d'un triangle, qui vaut 180°. ▸ Propriété de conservation des longueurs et des angles dans le cas de symétries centrale et axiale. ▸ Propriété de conservation des angles dans les cas d'agrandissement ou de réduction. ▸ Propriétés d'égalité d'angles et des longueurs des polygones réguliers. ▸ Propriété d'égalité de la mesure d'un angle au centre au double de l'angle inscrit.		✗	✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	L'arithmétique	La relation d'égalité dans l'écriture et le traitement des opérations, les transformations d'une forme à l'autre, la réduction et l'équivalence des fractions.	✗	✗	✗	✗	✗
	Les mesures de grandeur	La relation d'égalité dans la conversion des mesures de grandeur d'une unité donnée en une mesure d'une autre unité.	✗	✗	✗	✗	✗
	La géométrie	La relation d'égalité pour établir et transformer des formules.	✗	✗	✗	✗	✗
	Les statistiques	La relation d'égalité pour trouver et calculer des mesures de tendance centrale.		✗	✗	✗	✗

2.2.2 Cartographie / continuum pour l'enseignement de la relation d'égalité au primaire en Côte d'Ivoire

Catégorie	Sous-concepts	Illustrations dans les programmes	NIVEAUX SCOLAIRES						
			CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2	6e
Sens et représentation	Sens de l'égalité et symbole d'égalité	Établir une égalité entre un nombre en écriture canonique et sa décomposition additive ou entre des écritures additives différentes d'un même nombre : $5 = 3 + 2$; $2 + 2 = 3 + 1$.	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
		Établir une égalité entre deux fractions équivalentes : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.					✗	✗	
		Écrire un résultat par la réduction d'une somme, d'un produit ou d'une différence en écriture simplifiée (écriture canonique) : $1 + 8 = 9$; $19 - 7 = 12$; $2 \times 4 = 8$.	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Équivalences entre des mesures de grandeur	Établir une équivalence entre des mesures de longueur exprimées ou converties dans des unités différentes : 15 km = 150 hm.			✗	✗	✗	✗	
		Établir une équivalence entre des mesures de capacité exprimées ou converties dans des unités différentes : 25 hl = 25 000 dl.			✗	✗	✗	✗	
		Établir une équivalence entre des mesures de masse exprimées ou converties dans des unités différentes : 1 kg = 1 000 g.				✗	✗	✗	
		Exprimer une équivalence entre la valeur des pièces de monnaie ou entre les valeurs de pièces de monnaie et de billets de banque : 1 pièce de 500 F équivaut à 10 pièces de 50 F ; 1 billet de 1000 F correspond à 5 pièces de 200 F.			✗	✗	✗	✗	
Techniques opératoires (et relation)	Techniques de décomposition des nombres	Décomposer un produit en somme permet d'établir une égalité entre ce produit et cette somme itérée : $2 \times 3 = 3 + 3$.			✗	✗	✗	✗	
		Transformer une somme itérée sous forme de produit permet d'établir une égalité entre cette somme itérée et ce produit : $3 + 3 = 2 \times 3$.			✗	✗	✗	✗	

Catégorie	Sous-concepts	Illustrations dans les programmes	NIVEAUX SCOLAIRES						
			CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2	6e
Techniques opératoires (et relation) *(suite)*	Techniques de décomposition des nombres *(suite)*	Décomposer un nombre en centaines, dizaines et unités permet d'établir une égalité entre sa valeur canonique et sa valeur polynomiale : 179 = 100 + 70 + 9.		✗	✗	✗	✗	✗	
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Établir une égalité entre les fractions décimales et les nombres décimaux	Découverte des nombres décimaux à l'aide des fractions décimales : $\frac{7}{10} = 0{,}7$.					✗	✗	
Propriétés et transformations	Règles de calcul et de transformation	Usage du produit en croix (règle de trois) pour compléter un tableau de proportionnalité.				✗	✗	✗	
		Usage des propriétés de linéarité pour compléter un tableau de proportionnalité.				✗	✗	✗	
		Usage des règles de proportionnalité pour établir des équivalences entre les mesures d'aires et les mesures agraires.					✗	✗	
		Usage des propriétés des opérations (addition, multiplication) pour calculer les périmètres des figures planes (rectangle, carré, triangle et cercle).					✗	✗	
		Usage des propriétés de la multiplication pour calculer les aires des figures planes (rectangle, carré, triangle et cercle).					✗	✗	
Liens avec des domaines mathématiques	Opérations	L'égalité dans l'écriture et le traitement des opérations.	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Proportionnalité	L'égalité dans l'écriture et le traitement des rapports.					✗	✗	
	Fractions	L'égalité dans l'écriture et le traitement des opérations, la réduction et l'équivalence des fractions.					✗	✗	
	Numération	L'égalité dans la décomposition des nombres.	✗	✗	✗	✗	✗	✗	
	Mesure	L'égalité dans la conversion des mesures de grandeur.			✗	✗	✗	✗	
	Géométrie	L'égalité pour trouver des formules et faire des transformations.					✗	✗	

2.3 Carte conceptuelle unique pour l'enseignement de la relation d'égalité



2.4 Fiches pédagogiques pour l'enseignement de la relation d'égalité

2.4.1 Fiche pédagogique pour l'enseignement de la relation d'égalité au secondaire à Djibouti

❶ ANALYSE À PRIORI

1. Quelles sont les intentions didactiques de l'enseignant ?

L'intention de l'enseignant est de travailler sur les propriétés de la relation d'égalité qui visent la conservation des équivalences entre les expressions par des transformations successives des expressions algébriques (développement et réduction), numériques et d'autres écritures mathématiques lors de la résolution d'équations du premier degré : $ax + b = cx + d$ avec a, b, c et d réels.

2. Justification de la leçon (au regard du programme et/ou des savoirs)

Il s'agit de travailler sur les propriétés de conservation des équivalences pour résoudre des équations du premier degré dans le programme de huitième année (quatrième).

3. Objectifs visés en termes d'apprentissage

L'objectif visé est qu'à la fin de la leçon les élèves sachent établir des expressions équivalentes pour résoudre des équations du premier degré.

4. Objets d'apprentissage

La résolution des équations du premier degré en utilisant les propriétés de régularité des opérations qui permettent la conservation des équivalences entre des expressions afin de trouver la solution de l'équation du premier degré.

5. Prérequis et préalables

- La définition d'une équation.
- Les propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).
- Les transformations des expressions algébriques (développement, réduction).
- Le signe de l'égalité.

6. Ressources (matériels didactiques)

- Matériel individuel.
- Matériel collectif (kits et instruments de géométrie, calculatrices, cartes, globes, logiciels, documentaires, balance).
- Diverses ressources bibliographiques ou webographiques (livres, fichiers électroniques).

7. Stratégies d'enseignement

- Travail individuel (activité sur feuille polycopiée).
- Travail en petits groupes.

8. Prise en compte des dimensions genre / inclusive / différence

Proposer des problèmes qui prennent en compte des noms de filles et de garçons tout en tenant compte des noms des différentes communautés et des exemples d'élèves handicapés.

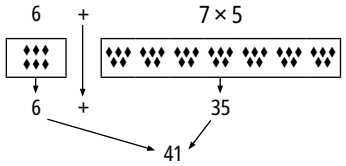
9. Références bibliographiques spécifiques à la fiche pédagogique

Diverses références bibliographiques ou webographiques (conseils, notes historiques, textes, revues, livres) pour des prolongements.

10. Anticipation

10.1 Obstacles possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et ressources développées

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)
Les trucs mathématiques scolaires ici renvoient à des formulations comme « déplacer des termes d'un membres à l'autre pour isoler le x ». Ils sont souvent utilisés par les élèves de manière mécanique. Ils sont souvent enseignés sans lien, ou presque, avec les propriétés mathématiques liées à la relation d'égalité, qui sous-tendent les transformations visant à trouver une équation équivalente permettant de déterminer la solution (valeur de x).	On pourra se limiter à l'utilisation des propriétés de conservation des égalités pour respecter le sens de l'objet mathématique, le concept égalité.
Obstacle sur les propriétés d'opérations. L'addition est commutative mais pas la soustraction : $30 + 40 = 40 + 30$ mais $100 - 40 \neq 40 - 100$.	On peut insister sur le respect d'un certain ordre pour éviter de compliquer les calculs.

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)
Obstacle sur les priorités des opérations : $A = \underbrace{6+7}\times 5$; $= \underbrace{13\times 5}$; $= 65$ (→ résultat faux). Plutôt que : $A = 6+\underbrace{7\times 5}$; $= \underbrace{6+35}$; $= 41$. Ici l'erreur est de réduire l'expression en traitant les calculs de gauche à droite (sens de lecture et écriture en français). Ce mode de traitement s'oppose à la prise en compte de la priorité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction, et constitue un obstacle à surmonter, par exemple en recourant à la schématisation ci-contre.	On pourrait procéder à une schématisation de l'expression numérique : 

10.2 Difficultés possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et ressources développées

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
Le choix des expressions utilisées pour les équations lors de l'apprentissage des techniques de résolution. Par exemple si on commence par une expression comportant des coefficients en fraction : $-\frac{1}{3}x+4 = \frac{1}{4}x+\frac{4}{5}$ car les opérations nécessaires pour conserver l'équivalence pour un début comportent des difficultés pour bon nombre d'élèves.	Il faut choisir de façon graduelle les expressions du simple au complexe, par exemple : • $x+1=2$; • $2x+2=7$; • $\frac{1}{3}x+3=2$; • $\frac{2}{5}x-4=\frac{4}{5}$; • $2x+3=3x+5$.
Les équations de type $ax+b=cx+d$ se déclinent en des équations spécifiques sur la base des valeurs des paramètres a, b, c et d. Ces valeurs et ces cas spécifiques peuvent être sources de difficultés. La suite de ce qui est écrit met en évidence des cas, difficultés et obstacles pouvant se produire. Nous en présentons ci-dessous des exemples repérés et analysés dans nos recherches.	

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
▸ **Cas 1 :** $a = 0$; $b = 0$; $c = 0$ et d=0. → L'équation devient : $0x = 0$. Cette équation a une infinité de solutions. Or l'élève qui applique le truc « $ax = d$ équivaut à $x = \frac{d}{a}$ » et écrit « $x = \frac{0}{0}$ » dira que c'est impossible car il est impossible d'avoir $\frac{0}{0}$. ▸ **Cas 2 :** $a = 7$; $b = 0$; $c = 9$ et $d = 0$. → L'équation devient : $7x = 9x$. La résolution conduit à $7x - 9x = 0$, donc $-2x = 0$, la solution est $x = 0$, mais un élève pourra écrire $x = -2$, ce qui est un résultat erroné correspondant au caractère « absorbant » du facteur -2. Ce terme décrit un phénomène souvent observé en calcul mental. L'élève veut retenir cette information insolite et cela « contamine » le calcul. ▸ **Cas 3 :** $a = 7$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = 0$. → L'équation devient : $7x = 0$. La résolution de $7x = 0$ donne $x = 0$, mais un élève pourra écrire $x = 7$ (résultat erroné). L'explication est identique à celle du cas précédent. ▸ **Cas 4 :** $a = 0$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = D$ un nombre différent de 0. → L'équation devient : $0x = D$. Cette équation $0x = D$ n'a pas de solution. Or l'élève pourrait proposer un résultat erroné $x = 0$ ou $x = D$ (là encore 0 ou la valeur de D ont un effet « absorbant »). ▸ **Cas 5 :** $a = 0$; $b = 6$; $c = 4$ et $d = 0$. → L'équation devient : $6 = 4x$. ▸ **Cas 6 :** $a = 4$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = 6$. → L'équation devient : $4x = 6$. Les cas 5 et 6 donnent deux équations équivalentes : $6 = 4x$ et $4x = 6$. Une des propriétés de la relation d'égalité explique cette équivalence. Ici la propriété de symétrie n'est pas si évidente pour l'élève. Pour l'élève ce sont deux équations différentes. Les élèves vont traiter plus facilement $4x = 6$ (plutôt que $6 = 4x$). L'inconnu étant dans le premier membre, l'élève va essayer de se ramener à cette forme.	Pour les cas correspondant aux équations, en procédant par substitution de x par des réels, on peut montrer les incohérences. ▸ **Cas 1 :** par exemple $0 \times 2 = 0$ ainsi tous les réels sont des solutions de $0x = 0$. ▸ **Cas 2 et 3 :** $-2 \times 0 = 0$ ou $7 \times 0 = 0$, donc 0 est solution pour l'équation du type $ax = 0$. ▸ **Cas 5 et 6 :** pour l'équation $6 = 4x$; $x = \frac{3}{2}$; $6 = 4 \times (\frac{3}{2})$ équivaut à $6 = 6$. Pour l'équation $4x = 6$; $4 \times (\frac{3}{2}) = 6$ équivaut à $6 = 6$.
Les transformations algébriques (développement et réduction).	On peut commencer par des distributivités simples de type $3(x + 4)$ suivies de la double distributivité jusqu'aux identités remarquables.

10.3 Erreurs possibles mathématiques au regard de l'analyse conceptuelle et ressources développées

Erreurs anticipées	Actions (processus de remédiation)
Erreurs en lien avec la résolution et la transformation de certains types d'équations (voir paragraphe ci-dessus).	Une remédiation possible de ces erreurs et notamment de celle du cas 2 porte sur la conception « du rien » pour le zéro. Celle-ci peut constituer un obstacle mais on peut travailler sur la substitution pour montrer l'erreur : $7x = 0$ équivaut à $x = 0$ car $7 \times 0 = 0$, mais $7 \times 7 = 49 \neq 0$.
Remarquons aussi une autre erreur souvent constatée dans nos recherches pour le cas $6 = 4x$ qui consiste à calculer additivement $x = 6 - 4$.	Là aussi on peut procéder à une substitution pour invalider cette réponse : Si $x = 6 - 4 = 2$ alors $4x = 4 \times 2 = 8 \neq 6$.
Erreur procédurale : « $2x + 3 = 7x + 5$ équivaut à $5x = 12x$ ». Cette erreur est due au fait que les élèves peuvent faire les calculs par membre sans se soucier de la nature des termes à additionner ou soustraire (erreur de caténation).	On peut encore procéder en substituant x par un entier pour montrer que l'égalité n'est pas conservée.
Erreurs sur les transformations algébriques faisant intervenir des exposants. Exemple : $(x + 1)^2 = x^2 + 1^2$.	On peut procéder par des distributivités bien explicitées : $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$; $= x^2 + x + x + 1$; $= x^2 + 2x + 1$.

11. Déroulement

Étape 1 **Phase de mise en situation**

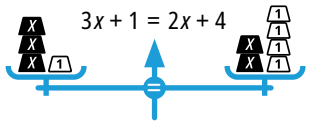
- Contrôle des prérequis
- Situation déclenchante

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Contrôle des prérequis Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Tâche de l'élève :** Effectuez les calculs suivants : **1.** (+6) + (+4) = … **2.** (−2,5) + (−4,8) = … **3.** (−7,6) + (+9,8) = … **4.** (−9) − (−7) = … **Activité du professeur :** ▸ Il anticipe les erreurs des élèves (cf. section 10.2 antérieure). ▸ Il propose l'activité portant sur les prérequis et énonce la consigne. ▸ Il observe les productions des élèves. ▸ Il fait des relances et propose des aides de façon individuelle, voire collective si besoin.

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Contrôle des prérequis *(suite)*	**Activité du professeur *(suite)* :** ▸ L'enseignant demande aux élèves de marquer en rouge les signes des nombres pour bien identifier la règle à utiliser (stratégie didactique et pédagogique pour mieux suivre la conservation d'équivalence). ▸ Sur la base de l'analyse des productions des élèves, il rappelle les propriétés sur la somme et la soustraction des nombres relatifs. **Réponses possibles de l'élève :** Les élèves répondent successivement. **1.** $(+6) + (+4) = +(6 + 4) = +10$. **2.** $(-2{,}5) + (-4{,}8) = -(2{,}5 + 4{,}8) = -7{,}3$. **3.** $(-7{,}6) + (+9{,}8) = +(9{,}8 - 7{,}6) = +2{,}2$. **4.** $(-9) - (-7) = (-9) + (+7) = -(9 - 7) = -2$.
Contenus d'apprentissage du prérequis	▸ Les propriétés d'opérations. ▸ Les règles des priorités des opérations. ▸ Les opérations sur les nombres relatifs. ▸ Les transformations algébriques.
Élément déclencheur Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du professeur :** Le professeur copie l'énoncé de la situation au tableau et demande aux élèves de lire silencieusement et de se mettre au travail. **Tâche de l'élève :** On considère l'équation du premier degré suivante : $4x - 6 = -15$. **1.** Tester cette équation pour $x = -2$ puis pour $x = -2{,}25$. **2.** En déduire une solution de l'équation. **Activité de l'élève :** Les élèves écoutent et essaient de percevoir l'objet de la leçon (tester l'équation $4x - 6 = -15$). Les élèves lisent silencieusement et commencent à réfléchir à la situation (en se demandant comment vérifier l'égalité). **Réponses possibles de l'élève :** **1.** Pour $x = -2$: $4 \times (-2) - 6 = -8 - 6 = -14 \neq -15$. Pour $x = -2{,}25$: $4 \times (-2{,}25) - 6 = -9 - 6 = -15$. **2.** Pour $x = -2$, on a vu que l'égalité n'est pas vérifiée, tandis que pour $x = -2{,}25$ l'égalité est vérifiée donc on peut en déduire que $-2{,}25$ est solution de l'équation.
Contenus d'apprentissage : de l'élément déclencheur	Effectuer des substitutions pour trouver une solution d'une équation de premier degré.

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Activités
- Synthèses

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité de l'enseignant :** Le professeur donne des explications et des orientations par un questionnement, la recherche de l'existence d'autres techniques de résolution qui consiste à chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue par tâtonnement ; à isoler x ; à regrouper les termes semblables en utilisant les propriétés des opérations. Une technique plus simple est le recours à la conservation d'équilibre d'une balance. **Tâches des élèves :** Résoudre l'équation $3x + 1 = 2x + 4$ en conservant le principe de l'équilibre de la balance à l'aide des étiquettes suivantes jusqu'à avoir x d'un côté de la balance et un nombre de l'autre côté : -1 $2x$ $-2x$ -4 $+4$ $+1$  Traduire les équivalences en activités mathématiques : $3x + 1 = 2x + 4$; ..... = ... = ... = ... x = ... **Réponses possibles :** 1. $3x + 1 + 1 = 2x + 4 + 1$; $3x + 2 = 2x + 5$. 2. $3x + 1 + 4 = 2x + 4 + 4$; $3x + 5 = 2x + 8$. 3. $3x + 1 - 2x = 2x + 4 - 2x$; $x + 1 = 4$ équivaut à $x + 1 - 1 = 4 - 1$, mais, avec cette dernière, le terme en x est isolé : $x = 3$.

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	**Activité du professeur :** Le professeur confronte les différentes réponses possibles et valide en mettant en évidence les règles de transformation des égalités pour établir des équations équivalentes et ainsi résoudre une équation. **Propriété** Ajouter, soustraire ou multiplier un même nombre aux deux membres d'une égalité la transforme en une égalité équivalente. Autrement dit, soient a, b et k des nombres relatifs : – si $a = b$ alors $a + k = b + k$; – si $a = b$ alors $a - k = b - k$; – si $a = b$ alors $a \times k = b \times k$.
Contenus d'apprentissage	▸ Propriétés de conservation des équivalences : a. « Quand on additionne, on soustrait, on multiplie un même nombre des deux côtés d'une égalité, l'égalité est conservée. » Exemple : $4x + 2 = 8$; $4x + 2 - 2 = 8 - 2$; $4x = 6$. b. « Quand on divise les deux côtés d'une égalité par un même nombre différent de 0, l'égalité est conservée. » Exemple : $4x = 6$; $4x \div 4 = 6 \div 4$; $x = 1{,}5$. ▸ Équations équivalentes. ▸ Résolution d'une équation à un inconnu.

Étape 3 **Phase d'objectivation / réinvestissement**

- Renforcement
- Intégration

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du professeur :** L'enseignant récapitule en reformulant l'objet d'apprentissage de façon simple : « On vient de découvrir que pour trouver la solution d'une équation, on doit établir successivement des équations équivalentes en utilisant les propriétés ci-dessus jusqu'à isoler x = … » L'enseignant propose ensuite des équations à résoudre en utilisant les propriétés de conservation d'équivalence. **Exercice 1.** Résoudre les équations ci-dessous : a. $x - 5 = 2$; b. $x + 4 = 7$; c. $x + 4{,}5 = 0{,}5$; d. $x - \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$.

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	**Exercice 2.** Résoudre les équations ci-dessous : a. $4x - 5 = 7x + 3$; b. $-3x + 8 = -5x + 3$; c. $-x + 6 = 2x + 5$; d. $7x - 7 = 9x + 9$. L'enseignant programme ces activités avec un souci de ne pas complexifier la tâche des élèves et en augmentant progressivement la complexité. Il commence par des équations où l'inconnue x ne possède pas de coefficient (1 comme coefficient). Par la suite il propose des équations avec des coefficients qui sont des fractions. Il complexifie la tâche pour que les élèves soient confrontés aux deux difficultés et enfin, plus tard, il propose des équations dans lesquelles les deux membres comportent des inconnues. **Activité de renforcement :** Résoudre les équations ci-dessous : a. $2(x + 1) - 4 = 4x + 1$; b. $3 - 2(2x + 1) = 5(2 - x)$. **Réponse possible de l'élève :** a. $2(x + 1) - 4 = 4x + 1$; équivaut à $2x + 2 - 4 = 4x + 1$; équivaut à $2x - 4 = 4x + 1$; équivaut à $2x - 4 + 4 = 4x + 1 + 4$; équivaut à $2x = 4x + 5$; équivaut à $2x - 4x = 4x + 5 - 4x$; équivaut à $-2x = 5$; équivaut à $\frac{-2x}{-2} = \frac{5}{-2}$; équivaut à $x = -\frac{5}{2}$. Au début, on expose comme correction les productions des élèves avec des équivalences trop détaillées. Ensuite, on peut aller plus rapidement. b. $3 - 2(2x + 1) = 5(2 - x)$; $3 - 4x - 2 = 10 - 5x$ *(par distributivité)* ; $-4x + 1 = 10 - 5x$; $-4x + 1 - 1 = 10 - 5x - 1$; $-4x + 5x = 9 - 5x + 5x$; $x = 9$.
Contenus d'apprentissage	▸ Technique de résolution des équations du premier degré. ▸ Propriétés de conservation des équivalences. ▸ Transformation algébrique, transformation d'expressions algébriques (réduction et développement) et les propriétés des opérations.

Étape 4 **Phase d'évaluation**

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	**Activité du professeur :** L'enseignant propose un exercice d'évaluation : « Résous l'équation : $-5x + 2 = 7x + 5$ ». L'enseignant prévoit une éventuelle remédiation. **Activité mathématique de l'élève :** Résous l'équation en utilisant les propriétés de conservation des équivalences jusqu'à isoler x. **Réponse possible :** $-5x + 2 - 2 = 7x + 5 - 2$; $-5x - 7x = 7x + 3 - 7x$; $-12x = 3$; $\frac{-12x}{-12} = \frac{3x}{-12}$; $x = -\frac{1}{4}$.
Contenus d'apprentissage	▸ Technique de résolution des équations du premier degré. ▸ Propriétés de conservation des équivalences. ▸ Transformation algébrique, transformation d'expressions algébriques (réduction et développement) et les propriétés des opérations.

12. Exercices d'approfondissement

Exercices séance tenante	Enoncé des exercices
Devoirs à la maison pour travaux dirigés ultérieurs (application, consolidation des acquis méthodologiques, approfondissement, recherche, projet).	Pour amorcer la mise en équation on peut proposer comme travail à la maison une situation-problème simple : « À l'aide de l'image ci-dessous, calculez la masse d'une seule orange sachant que les trois oranges ont toutes la même masse et que la balance est équilibrée. Les masses sont exprimées en gramme. »

2.4.2 Fiche pédagogique pour l'enseignement de la relation d'égalité au primaire en Côte d'Ivoire

❶ ANALYSE À PRIORI

1. Quelles sont les intentions didactiques de l'enseignant ?

➜ L'intention de l'enseignant est d'établir les relations d'égalité entre les différentes unités de mesures conventionnelles de longueurs en utilisant le signe d'égalité.

2. Justification de la leçon (au regard du programme et/ou des savoirs)

Il s'agit d'apprendre aux élèves à établir des équivalences entre les différentes unités de mesures conventionnelles de longueurs dans les activités de conversion des unités de mesure de longueurs à partir du tableau de conversion. L'intérêt est d'utiliser les conversions des mesures de longueur comme contexte pour établir des relations d'égalité entre les différentes unités de mesures conventionnelles de longueurs.

3. Objectifs visés en termes d'apprentissage

➜ L'objectif principal visé par la séance est que l'apprenant.e sache établir des égalités entre des mesures de longueur à partir du tableau de conversion construit par ses soins pour établir des équivalences entre les différentes unités de mesures conventionnelles de longueurs.

4. Objets d'apprentissage

- Construction du tableau des unités de mesure de longueur.
- Transformation et conversion des mesures de longueur.
- Usage des préfixes *milli*, *déci*, *centi*, *déca*, *hecto* et *kilo* comme outils des conversions des mesures de longueur.
- Conversion des unités de mesure de longueur.
- Équivalences entre les différentes unités de mesures conventionnelles de longueur.

5. Prérequis et préalables

- Sens des opérations de multiplication et de division.
- Règles de multiplication d'un nombre entier naturel par 10, 100 et 1000 (multiples de 10, 100 et 1000).

- Règles de division d'un nombre entier naturel par 10, 100 et 1000 (sous-multiples de 10, 100 et 1000).
- Propriétés de l'addition et de la multiplication.
- Unités de mesure de longueur.
- Propriétés de proportionnalité.

6. Ressources (matériels didactiques)

- Ressources individuelles : règles graduées et doubles décimètres (pour élèves).
- Ressources collectives : règle graduée pour tableau.
- Autres ressources : tableau des unités, manuels-élèves.

7. Stratégies d'enseignement

- Travail individuel (*chaque élève produit pour son propre compte*).
- Travail de groupe (*chaque élève s'investit pour produire au bénéfice de son groupe*).
- Travail collectif (*chaque élève ou groupe d'élèves s'investit pour produire au bénéfice de la classe*).

8. Prise en compte des dimensions genre / inclusive / différence

- Chaque groupe de travail comporte en moyenne trois (3) filles.
- Le texte de la mise en situation utilise le nom d'une fille et celui d'un garçon.
- Deux (2) enfants présentant des troubles à spectre autistique sont intégrés dans deux (2) groupes différents.

9. Références bibliographiques spécifiques à la fiche pédagogique

- Programmes éducatifs et guides d'exécution disponibles sur le site de la Direction de la Pédagogie et de la Formation Continue (DPFC). https://dpfc-ci.net/wp-content/uploads//dpfc_fichiers/Programmes/prg_primaires/CE1.pdf.
- Manuels-élèves en vigueur (édition École, Nation et Développement).

10. Anticipation

10.1 Obstacles possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)
▸ Le sens des préfixes et le lien entre le vocabulaire sur les notions *déci*, *milli*, *déca*, etc. du système des unités de mesures conventionnelles de longueur (*unité principale*, *sous-multiples : unités plus petites* et *multiples : unités plus grandes*). ▸ Le sens du vocabulaire sur les notions de dizaines, centaines, centièmes.	▸ Expliquer le sens et la valeur numérique des préfixes *déci*, *milli*, *déca*, etc. ▸ Savoir utiliser les données métriques sur une règle ou un instrument de mesure de longueur afin de faire des conversions. ▸ Faire identifier les différentes unités de mesure de longueur et les faire fixer par écrit. ▸ Nommer les valeurs numériques des notions de dizaines, centaines, centièmes.
▸ Non maîtrise de la règle de multiplication d'un nombre entier naturel par 10,100 et 1000.	▸ Faire rappeler l'usage de la règle de multiplication d'un entier naturel par 10,100 et 1000.

10.2 Difficultés possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
▸ Impossibilité de lire la graduation défectueuse des instruments de mesure de longueur. ▸ Lecture des données métriques sur les instruments de mesure de longueur.	▸ Disposer d'une règle ou d'un instrument de mesure de longueur de qualité avec une graduation intacte. ▸ Apprendre à repérer ou à lire des données ou mesures sur les instruments de mesure de longueur.
▸ Conversion erronée des mesures de longueur qui ne permettra pas d'établir les équivalences entre les différentes valeurs qui garantissent les égalités attendues entre les mesures de longueur.	▸ Rappeler et faire identifier les différentes unités de mesure de longueur et les faire fixer par écrit. ▸ Rappeler leur valeur numérique. ▸ Rappeler leur mode de fonctionnement.
▸ Application de la règle de multiplication d'un nombre entier naturel par 10,100 et 1000.	▸ Rappeler et expliquer le mode de fonctionnement de la règle de multiplication d'un entier naturel par 10, 100 et 1000.
▸ Positionnement ordonné des multiples et sous-multiples de l'unité principale (*le mètre : m*).	▸ Apprendre à disposer les unités de mesure de longueur de manière ordonnée dans un tableau.

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
▸ Interprétation des données sur les mesures de longueur dans une situation-problème (*calculer une mesure de longueur équivalente à une autre*).	▸ Utiliser le tableau des mesures de longueur comme une aide didactique pour établir des équivalences entre les mesures de longueur dans une situation-problème.

10.3 Erreurs possibles mathématiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
▸ Erreurs de calcul (*procédure de multiplication d'un entier par un multiple de 10 et de l'addition*).	▸ Rappeler et expliquer la règle de multiplication d'un entier naturel par 10, 100 et 1 000.
▸ Erreurs de conversions (*omission des symboles des données dans un tableau de mesure de longueur*) (exemple : 1 m = 1000 ...).	▸ Rappeler et faire identifier les différentes unités de mesure de longueur et les faire fixer. ▸ Apprendre à disposer et à lire les unités de mesure de longueur dans un tableau.

❷ PENDANT ET APRÈS LA CLASSE

11. Déroulement

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Contrôle des prérequis
- Situation déclenchante

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Contrôle des prérequis : rappeler les acquis sur les unités de mesure de longueur	**Activités du maître :** 1. Il fait nommer l'unité principale des unités de mesure de longueur qui est le mètre (noté « m »). 2. Il demande d'identifier les unités plus petites que l'unité principale (sous-multiples) que sont le millimètre (mm), le centimètre (cm) et le décimètre (dm). 3. Il les fait expliquer et justifier. 4. Il fait rappeler les unités plus grandes que l'unité principale (multiples) que sont le décamètre (dam), l'hectomètre (hm) et le kilomètre (km). 5. Il les fait expliquer et justifier. 6. Il demande de ranger les unités de longueur de la plus grande à la plus petite. 7. Il fait dresser le tableau des mesures de longueur et les fait écrire sur les ardoises.

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Contrôle des prérequis : rappeler les acquis sur les unités de mesure de longueur *(suite)*	**Activités de l'élève :** 1. Il nomme l'unité principale : le mètre noté « m ». 2. Les unités de mesure plus petites que le mètre sont le millimètre, le centimètre, le décimètre. Elles sont appelées « sous-multiples du mètre ». 3. Le millimètre se note « mm » et équivaut à 1000 fois moins que le mètre « m » (1 m = 1000 mm). Le centimètre se note « cm » et équivaut à 100 fois moins que le mètre « m » (1 m = 100 cm). Le décimètre se note « dm » et équivaut à 10 fois moins que le mètre « m » (1 m = 10 dm). 4. Les unités de mesure plus grandes que le mètre sont le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre. Elles sont appelées « multiples du mètre ». 5. Le décamètre se note « dam » et équivaut à 10 fois plus que le mètre « m » (1 dam = 10 m). L'hectomètre se note « hm » et équivaut à 100 fois plus que le mètre « m » (1 hm = 100 m). Le kilomètre se note « km » et équivaut à 1000 fois plus que le mètre « m » (1 km = 1000 m). **N.B. :** ces équivalences établies autour de l'unité principale (le mètre : « m ») ont un intérêt didactique : celui de servir d'outils à la construction du tableau de conversion des mesures de longueur. 6. Il range les unités de la plus grande à la plus petite : km, hm, dam, m, dm, cm, mm. 7. Il construit le tableau de numération qui se présente comme suit :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Contenus d'apprentissage du prérequis	▸ Nomenclature des unités de mesure de longueur. ▸ Construction du tableau des mesures de longueur.
Elément déclencheur Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du maître :** Il présente la situation d'apprentissage : « Deux enfants, Akissi et Yéo, à la fin d'une course présente leur distance parcourue sur une fiche technique reçue à l'arrivée : Distance d'Akissi : 12 hm ; Distance de Yéo : 120 dam. Comparez les distances parcourues par ces deux (2) enfants. »

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Elément déclencheur Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	Ici, il est question d'établir, à la suite de conversions, une équivalence (une égalité) entre la distance exprimée en hectomètre (hm) et celle exprimée en décamètre (dam) pour déduire que les deux enfants ont parcouru la même distance. Le maître pose des questions de compréhension. **1.** *De qui parle-t-on dans le texte ?* **2.** *Qu'ont-ils fait ?* **3.** *Quelle est la distance parcourue par chacun d'eux ?* Il fait calculer la distance parcourue par chaque coureur en mètres et la fait convertir dans d'autres unités de mesure de longueur. **Activités de l'élève :** **1.** Il lit la situation au tableau, l'analyse, repère les données mathématiques et répond aux questions de compréhension avant d'entamer les activités mathématiques attendues. **2.** « Le texte parle de Yéo et d'Akissi. Ils font une course. Akissi a parcouru 12 hm et Yéo a parcouru 120 dam. » **3.** Activités mathématiques de l'élève : Il calcule la distance en mètres ou dans une autre unité choisie par chaque enfant par la conversion à l'aide du tableau des unités de mesures de longueur. • Distance d'Akissi : 12 hm ; • Distance de Yéo : 120 dam. Chaque élève construit le tableau de conversion des mesures de longueur et convertit les distances données dans une même unité.

	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Akissi	**1**	**2**	0	0	0	0	0
Yéo	**1**	**2**	**0**	0	0	0	0

- **Au niveau des kilomètres**, les conversions sont :
  Distance d'Akissi : 12 hm = 1 km + 2 hm ;
  Distance de Yéo : 120 dam = 1 km + 2 hm ;
  → Donc 12 hm = 120 dam.
- **Au niveau des décamètres**, les conversions sont :
  Distance d'Akissi : 12 hm = 120 dam ;
  Distance de Yéo : 120 dam = 120 dam ;
  → Donc 12 hm = 120 dam.
- **Au niveau des décimètres**, les conversions sont :
  Distance Akissi : 12 hm = 12 000 dm
  Distance Yéo 120 dam = 12 000 dm
  → Donc 12 hm = 120 dam.

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Elément déclencheur Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	• **Au niveau des millimètres,** les conversions sont : **Distance Akissi :** 12 hm = 1 200 000 mm **Distance Yéo :** 120 dam = 1 200 000 mm → Donc 12 hm = 120 dam. **Conclusion :** quelle que soit l'unité dans laquelle la conversion est faite, Akissi et Yéo parcourent la même distance. Donc 12 hm = 120 dam.
Contenus d'apprentissage de l'élément déclencheur	Le contenu d'apprentissage de l'élément déclencheur concerne la compréhension du texte, l'analyse de ses données mathématiques, la construction du tableau de conversion des mesures de longueur et la conversion des distances parcourues des coureurs dans différentes unités de mesure de longueur afin d'extraire l'égalité entre 12 hm et 120 dam.

Étape 2 **Phase de réalisation**

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du maître :** Il propose une série d'exercices et un problème sur des conversions. **Exercice 1 :** le maître demande de relier la grandeur 15 m aux valeurs équivalentes et d'écrire les égalités. 15 m • • 150 cm • 15 000 mm • 105 cm • 150 dm → 15 m = 15 000 mm ; → 15 m = 150 dm. **Exercice 2 :** il demande de compléter les égalités ci-dessous avec le nombre qui manque : ▸ 3 hm = ... dam ; ▸ 10 dam = ... cm. **Exercice 3 :** il demande de compléter les égalités ci-dessous avec l'unité de longueur qui manque : ▸ 5 km = 500 ... ▸ 3 cm = 30 ... **Exercice 4 :** problème « Un élève parcourt une piste conduisant à son école en deux tranches dont les longueurs sont 70 m et 2000 cm. Une commerçante parcourt la piste conduisant au marché du village en trois parts qui sont 6 dam, 20 m et 100 dm. Indiquez laquelle de ces deux personnes parcourt la plus longue distance pour aller à son lieu de travail. »

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées *(suite)*	**Activités de l'élève :** L'élève lit le problème au tableau, repère les données mathématiques, les analyse et les traite. **Activités mathématiques de l'élève :** Il calcule la distance en m ou dans une autre unité choisie par chaque élève par la conversion à l'aide du tableau des unités de mesures de longueur.
Contenus d'apprentissage	Conversion des mesures de longueur.

Étape 3 **Phase d'objectivation / réinvestissement**

- Renforcement
- Intégration

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du maître :** Il pose un problème complexe à ses élèves. **Problème :** « Un élève parcourt une piste conduisant à son école en deux (2) tranches dont les longueurs sont de 70 m et 2000 cm. Une commerçante parcourt la piste conduisant au marché du village en trois (3) parts qui sont 6 dam, 20 m et 100 dm. Indiquez laquelle de ces deux (2) personnes parcourt la plus longue distance pour aller à son lieu de travail. » **Activités de l'élève :** L'élève lit le problème au tableau, repère les données mathématiques, les analyse et les traite. **Activités mathématiques de l'élève :** Il calcule la distance en m ou dans une autre unité choisie par chaque enfant par la conversion à l'aide du tableau des unités de mesures de longueur. 2000 cm = 20 m 70 m + 20 m = 90 m 6 dam = 60 m 100 dm = 10 m 60 m + 20 m + 10 m= 90 000 m Les deux élèves parcourent la même distance pour aller au travail. 70 m + 2 000 m = 6 dam+ 20 m + 100 dm
Contenus d'apprentissage	Calcul de mesure et décomposition en des mesures équivalentes avec des unités de mesure différentes.

Étape 4 **Phase d'évaluation**

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du maître :** il fait compléter les égalités suivantes sur les mesures de longueur. **Activités mathématiques de l'élève :** Il complète les égalités avec le nombre ou l'unité de mesure de longueur : ▸ 7 hm = ... m ; ▸ ..... dm = 200 mm ; ▸ 900 cm = 9 ..... ; ▸ 65 m = ... dm.
Contenus d'apprentissage	Conversion des mesures de longueur.

12. Exercices d'approfondissement

Types et contenus des tâches	Activités du professeur / activités de l'élève
Exercices d'approfondissement	**Activités du maître :** il propose à ses élèves un exercice d'approfondissement et un problème à faire à la maison. **1. Complète les égalités suivantes :** ▸ 12 dam + 5 m = ... dm ; ▸ 54 m + ... cm = 5 430 cm. **2. Problème :** « Yao parcourt 2 km dans un premier temps et refait un détour de 15 dam. Exprimez la distance totale parcourue par Yao en m. »

Conclusion générale

LA PRODUCTION DES RESSOURCES a été l'occasion de mettre au centre des considérations mathématiques et didactiques, voire pédagogiques. Les ressources ont été pensées de manière à donner du sens aux situations déclenchantes pertinentes et adaptées, mais aussi aux situations de réalisation, d'évaluation et d'approfondissement. Un jeu sur des variables de ces situations permet de ne pas réduire les apprentissages à la seule maîtrise de techniques et de trucs mathématiques, mais de proposer et justifier auprès des élèves des tâches qui induisent des activités mathématiques riches. La production des ressources est guidée par la nécessité de prendre en compte les cheminements cognitifs des élèves et d'être attentifs aux étapes des itinéraires cognitifs proposés en vue de l'apprentissage et de l'enseignement des concepts en jeu et pour lesquels la relation d'égalité est souvent implicite et utilisée comme outil.

Les trois volumes (*Exemples d'outils contextualisés pour la formation d'enseignantes et d'enseignants de mathématiques. Volume 1 - Nombres et opérations ; Volume 2 - Géométrie plane et géométrie dans l'espace ; Volume 3 - Proportionnalité, fonctions et algèbre*) s'inscrivent dans la continuité des productions du GTE 4 (*Guide pour le formateur d'enseignants de mathématiques* et *Glossaire de didactique*). Ces productions ciblent les formateurs d'enseignants de mathématiques. Dans cette série d'ouvrages, le lecteur pourra ainsi trouver de nombreux exemples contextualisés d'outils et ressources qui ont été coconstruits avec la contribution de représentants de 13 pays de la francophonie, pour penser des formations d'enseignants. Par « contextualisé », nous entendons des outils qui prennent en compte dans le détail les spécificités de chaque politique éducative des 13 pays concernés.

Nous avons retenu plusieurs critères : l'intégration des contenus des programmes du pays analysés, notamment par des cartographies / continuums et des fiches pédagogiques, l'expérience des participantes et participants aux groupes de productions associés aux webinaires du GTE 4 de renforcement du pôle des experts associés, les contraintes et habitudes pédagogiques des pays concernés, ainsi que la dimension genre. Les représentants des 13 pays ont participé à cette œuvre collective au sein des groupes de travail et ont contribué ensemble aux analyses conceptuelles et à l'élaboration des cartes conceptuelles en fonction des concepts mathématiques en jeu. Ainsi pour chaque thème, précisément, les analyses et cartes conceptuelles sont des productions communes des pays qui ont travaillé sur le même thème.

La contextualisation se révèle dans le choix des cartographies / continuums et des fiches pédagogiques. Si nous avons privilégié l'aspect contextualisé des ressources présentées dans cet ouvrage, c'est pour répondre aux demandes des ministères des pays, mais aussi aux préoccupations des participantes et participants aux webinaires.

Aussi avons-nous voulu plonger ces productions spécifiques dans des analyses qui dépassent les pays et qui, de ce fait, sont utilisables par les 23 pays éligibles au programme APPRENDRE. C'est le cas des analyses et cartes conceptuelles qui fournissent

des connaissances mathématiques plus élargies, ainsi que des pistes pour enseigner les domaines ou concepts traités. Ces connaissances et pistes ne se limitent plus aux programmes spécifiques à chaque pays, mais essaient de prendre en compte l'avancée des connaissances scientifiques dans le domaine.

Nous pensons que ces deux axes de rédaction, à savoir, les ressources et outils contextualisés et les réflexions plus larges associées aux recherches en didactique des mathématiques, permettront d'en faire un usage éclairé, efficace et adapté.

Structure et contenus des trois ouvrages

Dans ces trois volumes, nous avons présenté une introduction générale. Celle-ci est suivie de différents chapitres concernant les ressources et outils co-construits. Ces chapitres s'organisent autour d'une introduction pour chaque thème des ressources produites articulant des réflexions générales et spécifiques, avec des éléments qui structurent des analyses à priori des contenus mathématiques à enseigner. Ces analyses sont en lien avec des théories didactiques éprouvées en recherche et en formation des enseignants. Ces théories ont servi de cadre et de base pour penser les formations à l'enseignement des mathématiques et les webinaires du GTE 4 au sein du programme APPRENDRE. Ces analyses à priori qui précèdent les ressources, permettent d'exercer une vigilance didactique dans la mesure où elles servent à lire et gérer le réel de la classe afin de favoriser les apprentissages des élèves.

L'utilisation des ressources en lien avec des savoirs issus de la recherche par les formateurs permettra à ceux-ci de mieux comprendre et de mieux cerner les enjeux de la pratique enseignante. De plus, l'analyse conceptuelle (AC) vise à éclairer les différentes dimensions associées à un concept suivant la théorie de Vergnaud. Les catégories structurant la carte conceptuelle (CC) éclairent sur les objectifs des alinéas du programme d'études et sur leur place dans les programmations qui en découlent. La cartographie / continuum (CCO), quant à elle, permet aux formateurs d'analyser les programmes officiels et leur évolution et de faire comprendre le processus de transposition didactique propre à ces programmes (lieu de définition et de répartition institutionnelle des savoirs à enseigner). La fiche pédagogique (FP), enfin, propose des situations susceptibles de provoquer les apprentissages attendus par les programmes institutionnels.

Les tableaux ci-dessous décrivent les 39 outils et ressources présentés dans l'ensemble des trois volumes.

Répartition de ressources communes unifiées par groupe de pays

	Analyses conceptuelles	Cartes conceptuelles	TOTAL
Bénin, Sénégal, Togo	1	1	2
Burundi, Comores, Congo, Mauritanie	1	1	2
Bénin, Togo, Madagascar	1	1	2
Bénin, Congo, Sénégal	1	1	2
Cameroun, Tchad, Madagascar	1	1	2
Djibouti, Côte d'Ivoire	1	1	2
TOTAL	**6**	**6**	**12**

Répartition de ressources contextualisées par pays

	Cartographies / continuums	Fiches pédagogiques	TOTAL
Bénin	2	1	3
Burundi	1	1	2
Cameroun	1	0	1
Comores	1	0	1
Congo	1	1	2
Côte d'Ivoire	1	1	2
Djibouti	1	1	2
Madagascar	2	1	3
Mauritanie	0	1	1
Sénégal	2	2	4
Tchad	1	1	2
Togo	2	2	4
TOTAL	**15**	**12**	**27**

Tableau-synthèse des 39 productions

Légende :

AC : Analyse conceptuelle
CC : Carte conceptuelle
CCO : Cartographie / continuum
FP : Fiche pédagogique

		AC	CC	CCO	FP	TOTAL
Les nombres décimaux	Bénin (Bé) Sénégal (S) Togo (T)	1 BéST	1 BéST	1 Bé 1 S 1 T	1 Bé 1 S 1 T	**8**
Les opérations arithmétiques, sens et techniques	Burundi (Bu) Comores (Co) Congo (Cg) Mauritanie (M)	1 BuCoCgM	1 BuCoCgM	1 Bu 1 Co	1 Bu 1 Cg 1 M	**7**
Proportionnalité et fonctions affines et linéaires	Bénin (Bé) Madagascar (Mg) Togo (T)	1 MgT	1 MgT	1 Mg 1 T	1 T	**5**
Géométrie plane	Bénin (Bé) Congo (Cg) Sénégal (S)	1 BéCgS	1 BéCgS	1 Bé 1 Cg 1 S	1 S	**6**
Géométrie dans l'espace	Cameroun (C) Madagascar (Mg) Tchad (Tc)	1 CMgTc	1 CMgTc	1 C 1 Mg 1 Tc	1 Mg 1 Tc	**7**
L'algèbre et la pré-algèbre	Djibouti (D) Côte d'Ivoire (Ci)	1 DCi	1 DCi	1 D 1 Ci	1 D 1 Ci	**6**
Total		**6**	**6**	**15**	**12**	**39**

Bibliographie

1 Enseignement de la proportionnalité et des fonctions numériques

1.1 Enseignement de la proportionnalité

Coppé, S. (1996). Regards sur la pratique : à propos du vrai ou du faux en séance de mathématiques. *Grand N*, 60, 33-42.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères-IREM*, 59, 5-41.

Nguala, J.-B. (2005). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45-63.

Piolti-Lamorthe, C. et **Roubin, S.** (2024). Des mises en train pour bien démarrer. *Au fil des maths*, 552, 26-34.

Simard, A. (2012a). Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2-6e. *Grand N*, 90, 9-68.

— (2012b). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans une perspective didactique. *Petit x*, 89, 51-62.

1.2 Enseignement des fonctions linéaires et affines

Cazes, C. et **Vandebrouk, F.** (2014). Vil Coyote rattrapera-t-il Bip-Bip ? Un exemple d'introduction de fonctions à partir d'une situation concrète. *Repères IREM*, 95, 1-18.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *Petit x*, 67, 33-61.

Coppé, S., **Dorier, J.-L.** et **Yavuz, I.** (2006). Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*, 71, 29-60.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65. IREM de Strasbourg.

Grau, S. (2017). Modélisation : le cas des fonctions affines. *Repères IREM*, 108, 41-62.

— (2022). Enseigner les fonctions affines : le point de vue de la covariation. *Petit x*, 116, 23-50.

Passaro, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. In *Enjeux et débats en didactique des mathématiques : actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 667-684). ARDM.

2 Enseignement de l'égalité

Adihou, A. (2010). Étude des sens accordés au signe d'égalité par les élèves du premier cycle du secondaire dans la réalisation d'activités portant sur le concept d'égalité et le signe d'égalité. Dans *Actes du colloque du Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques (GCEDM)*, 5-9 juin 2009, Université York, Toronto, Ontario.

— (2011). L'ingénierie didactique pour l'étude des sens accordés au signe d'égalité par les élèves du premier cycle du secondaire dans la réalisation d'activités portant sur le concept d'égalité et le signe d'égalité. Dans *Actes de la 15e école d'été de didactique des mathématiques, ARDM*, Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009.

— et **Marchand, P.** (2019). *Les trucs mathématiques au primaire.* JFD Éditions, Canada.

Carpenter, T., **Levi, L.**, **Franke, M.** et **Zeringue, J.** (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, *37*(1), 53-59.

De Champlain, D., **Mathieu, P.**, **Patenaude, P.** et **Tessier, H.** (1996). *Lexique mathématique, enseignement secondaire* (2e éd.). Les Éditions du Triangle d'Or.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique

Fischer, J., **Sander, E.**, **Sensevy, G.**, **Vilette, B.** et **Richard, J.** (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, 34, 439-456.

Passaro, V. (2019). La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire. Gouvernement du Québec.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Présentation des auteurs

Denis BUTLEN est chercheur en didactique des mathématiques, professeur émérite de l'Université CY Paris Cergy Université et associé au laboratoire de didactique André Revuz. Il est coordinateur du Groupe Thématique d'Expertise « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » du programme APPRENDRE. Ses travaux concernent principalement l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, notamment issus de milieux socialement défavorisés à l'école primaire et au début du collège. Ils s'articulent autour de trois axes principaux. Le premier axe centré sur l'enseignement du calcul mental et de la résolution de problèmes porte sur l'étude des liens entre construction des connaissances, construction du sens et maîtrise des techniques opératoires. Le deuxième axe concerne les pratiques des enseignants exerçant dans le cadre de l'éducation prioritaire (organisation et catégorisation des pratiques, gestes professionnels associés). Le troisième axe porte sur la formation initiale et continue des professeurs des écoles.

Adolphe Cossi ADIHOU est professeur titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada). Ses recherches portent sur le développement de la pensée algébrique, les problématiques relatives aux trucs mathématiques en enseignement et en apprentissage, les difficultés d'enseignement-apprentissage en mathématiques, les pratiques enseignantes et la formation pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. Impliqué en formation initiale et continue des enseignants, il a conçu des ressources didactiques qui articulent savoirs mathématiques et didactiques dans une approche collaborative. Il est notamment intervenu au Bénin, au Cameroun, au Congo, en Guinée, au Niger, en République Centrafricaine et au Togo dans le cadre des missions du GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » en vue du renforcement des compétences en didactique des mathématiques des formateurs de formateurs d'enseignants dans le cadre du projet APPRENDRE.

Jeanne KOUDOGBO est professeure titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke, au Québec (Canada). Elle est codirectrice des programmes de maîtrise, DESS et microprogramme en adaptation scolaire, co-directrice et responsable du volet mathématique de la Clinique Pierre-H.-Ruel, rédactrice en chef de RISADiMA et secrétaire générale de l'Association africaine de didactique des mathématiques (ADiMA). Chercheuse au CRIDiD, CREA et CREAS, ses travaux concernent les pratiques enseignantes, les dispositifs novateurs d'aide aux élèves en difficulté, les mécanismes de construction des connaissances, les visées et les contenus des programmes et des manuels scolaires, les défis actuels en enseignement-apprentissage des mathématiques ainsi que les dispositifs de formation initiale et continue. Membre active de comités scientifiques et d'organismes internationaux, elle contribue notamment au GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » du programme APPRENDRE, pour lequel elle a assuré la formation de formateur-ices en Afrique.

Julie HOROKS est professeure des universités à l'Université Paris-Est Créteil (UPEC) et membre du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR). Elle est responsable du master MEEF 1er degré de l'INSPÉ de l'académie de Créteil, rédactrice en chef de la revue *Grand N*, co-vice-présidente de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM) et membre du CNU 2 - 6e section. Elle intervient dans la formation initiale et continue des enseignantes et enseignants du primaire et du secondaire. Membre du GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » du programme APPRENDRE, elle a animé plusieurs ateliers de formation de formateurs en Afrique. Ses thèmes de recherche portent sur l'évaluation en mathématiques (caractérisation des pratiques d'évaluation d'enseignants du collège en algèbre et production de ressources) et sur les effets de la formation par la recherche en didactique des mathématiques sur les pratiques d'enseignement en mathématiques des professeurs des écoles débutants.

Sylvie COPPÉ est retraitée, anciennement maîtresse d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève en didactique des mathématiques. Elle participe à la formation des enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire. Ses domaines de recherche concernent la résolution de problèmes, l'enseignement de l'algèbre élémentaire, l'évaluation, les ressources, les pratiques enseignantes et la collaboration entre enseignants, formateurs et chercheurs. Membre du GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences », elle participe dans ce cadre à la réflexion sur la formation des formateurs et enseignants de mathématiques.

Gervais AFFOGNON est docteur en didactique des mathématiques. Ses recherches ont porté sur les perspectives historiques dans l'enseignement des mathématiques. Il est chargé de cours au lycée et dans les écoles de formation des enseignants et conseiller pédagogique pour le suivi de proximité des enseignants. Membre du GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences », il a dirigé dans le cadre du programme APPRENDRE des ateliers de renforcement de capacités en didactique des mathématiques de formateurs de formateurs dans plusieurs pays d'Afrique. Il a également participé à la relecture des programmes de mathématiques des 1re et 2e années du primaire au Bénin.

apprendre.auf.org

https://www.facebook.com/ProgrammeAPPRENDRE

https://www.linkedin.com/company/programme-apprendre

https://www.youtube.com/c/programmeapprendre

https://www.whatsapp.com/channel/0029VbD7xuLLCoWuCNubcH0N