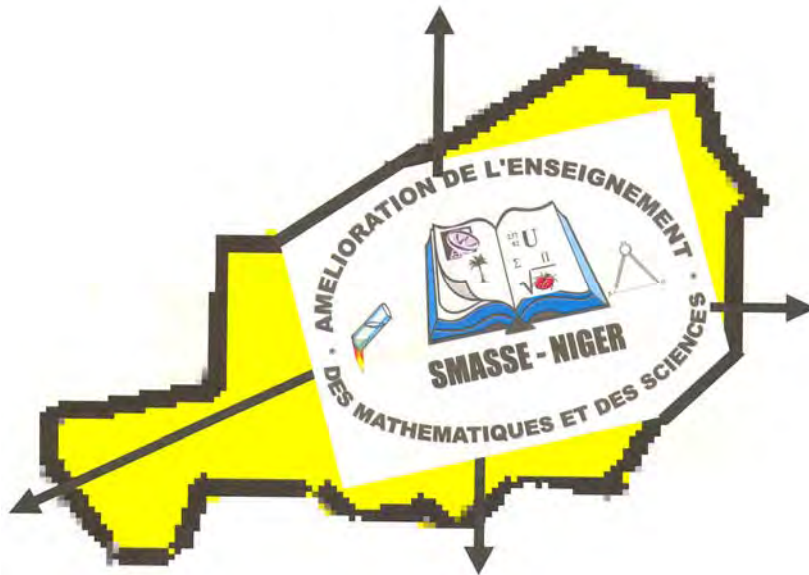


## TROISIEME CYCLE DE FORMATION DES FORMATEURS

### REGIONAUX

RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX  
DANS L'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET  
DES SCIENCES SELON L'APPROCHE ASEI/PDSI



\_ LIEU : CENTRE NATIONAL DE MAINTENANCE (CNM) / NIAMEY

\_ DATES : DU 05 AU 14 Janvier 2009  
DU 16 AU 25 Février 2009

THEME : LA VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE REEL

COMPILE PAR LES FORMATEURS NATIONAUX DE  
MATHEMATIQUES

Niamey, décembre 2008

# **Thème : la valeur absolue d'un nombre réel**

## **Justification**

La valeur absolue est utilisée pour traduire des situations de la vie courante telles que les distances. Elle intervient aussi dans certains domaines tels que l'analyse (calculs de limites et intégral), l'algèbre (résolutions d'équations et d'inéquations, nombres complexes), les sciences physiques (calculs d'incertitudes sur les mesures, calculs de vitesses). Elle est enseignée au secondaire et figure dans les programmes de 4<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup> et seconde.

## **But**

Améliorer l'enseignement/apprentissage de la valeur absolue au secondaire.

## **Objectifs**

- Identifier les difficultés liées à l'enseignement/apprentissage de la valeur absolue au secondaire.
- Proposer des activités ou des solutions pour chaque difficulté énumérée ci haut.
- Préparer un plan de leçon ASEI d'une durée de 55mn sur la valeur absolue au collège.

## **Plan du module**

Introduction

I. Les difficultés liées à l'enseignement /apprentissage de la valeur absolue et proposition de solutions

II. Fonction valeur absolue.

III. Fiche de leçon ASEI

Conclusion

## Introduction

Les premières conceptions de la notion de valeur absolue étaient strictement liées à celles du nombre relatif en tant que nombre arithmétique muni d'un signe. Ces conceptions ont par la suite évolué. Ainsi, la valeur absolue devient objet et outil d'enseignement (elle est utilisée dans les calculs d'erreurs, de limites, d'intégrales...).

Au 19<sup>ème</sup> siècle, on assiste à une formalisation de la notion de valeur absolue et de nos jours il existe plusieurs définitions. Mais, force est de constater que les enseignants et les élèves éprouvent quelques difficultés dans leurs appropriations.

Quels sont les obstacles liés à la compréhension de ce concept par les élèves ? Quelles solutions ou activités pourrait-on proposer pour surmonter ces obstacles ?

Telles sont des questions auxquelles nous allons essayer de répondre dans ce module.

### **I. Difficultés liées à l'enseignement / apprentissage de la valeur absolue et proposition de solutions**

#### TÂCHE

1. Résoudre dans IR les équations et inéquations ci-dessous en précisant les étapes de la résolution.

a)  $|x - 2| = |2x + 3|$     b)  $\sqrt{(3x-4)^2} = 3$     c)  $|2x-3| = x-3$     d)  $|-2x-3| \leq 4$

2. Énumérer quelques difficultés liées à l'enseignement/apprentissage de la valeur absolue et proposer des solutions pour les surmonter.
3. Proposer des définitions pour la valeur absolue d'un réel et dite la plus adaptée pour le collège puis élaborer une activité pour l'introduire.

#### Synthèse de la tâche

##### 1. Résolution

a)  $|x - 2| = |2x + 3| \Leftrightarrow x - 2 = 2x + 3$  ou  $x - 2 = -(2x + 3)$  **1<sup>ère</sup> étape**  
 $\Leftrightarrow -x = 5$  ou  $x - 2 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -5$  ou  $3x = -1 \Leftrightarrow x = -5$  ou  $x = -1/3$  **2<sup>ème</sup> étape**

$$S = \left\{ -5; -\frac{1}{3} \right\}$$

**1<sup>ère</sup> étape** : application de la propriété  $|x|=|a|$  si et seulement si  $x = a$  ou  $x = -a$ .

**2<sup>ème</sup> étape** : résolution des équations dans IR.

b)  $\sqrt{(3x-4)^2} = 3 \Leftrightarrow |3x-4| = 3$

$\Leftrightarrow 3x-4 = 3$  ou  $3x-4 = -3$

$\Leftrightarrow 3x = 7$  ou  $3x = 1$   $x = 7/3$  ou  $x = 1/3$

$S = \left\{ \frac{7}{3}; \frac{1}{3} \right\}$

**1<sup>ère</sup> étape**

**2<sup>ème</sup> étape**

**3<sup>ème</sup> étape**

**1<sup>ère</sup> étape** : suppression du radical

**2<sup>ème</sup> étape** : application de la propriété  $|x|=|a|$  si et seulement si  $x = a$  ou  $x = -a$ .

**3<sup>ème</sup> étape** : résolution des équations dans IR.

c)

**1<sup>ère</sup> étape** : suppression de la valeur absolue

On exprime à l'aide d'un tableau l'expression  $|2x-3|$  sans valeur absolue :

x	$-\infty$			$\frac{3}{2}$
	$+\infty$			$\frac{3}{2}$
$ 2x-3 $	$-2x+3$	0	$2x-3$	

Nous sommes donc ramené à résoudre deux équations :

(1) résoudre  $-2x+3 = x-3$  dans l'intervalle  $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$

(2) résoudre  $2x-3 = x-3$  dans l'intervalle  $\left[ \frac{3}{2}, +\infty \right[$

**2<sup>ème</sup> étape** : résolution des équations dans IR

$-2x+3 = x-3 \Leftrightarrow x = 2$

$2x-3 = x-3 \Leftrightarrow x = 0$

**3<sup>ème</sup> étape** : contrôle de l'appartenance des solutions obtenues à l'intervalle envisagé

- Résolution de  $-2x+3 = x-3$  dans l'intervalle  $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$

$2 \notin \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$  donc 2 n'est pas solution.

- Résolution de  $2x-3 = x-3$  dans l'intervalle  $\left[ \frac{3}{2}, +\infty \right[$

$0 \notin \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right[$  donc 0 n'est pas solution.

$S = \emptyset$

**Autre méthode**

$$|2x-3|=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3=x-3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3=-(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=0 \end{cases}$$

ou  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x=2 \end{cases}$  impossible

$S = \emptyset$

**d)**

**1<sup>ère</sup> étape :** suppression de la valeur absolue

On exprime à l'aide d'un tableau l'expression  $|2x - 3|$  sans valeur absolue :

<b>x</b>	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
<b><math>  -2x - 3  </math></b>	<b><math>-2x - 3</math></b>	<b>0</b>	<b><math>2x + 3</math></b>

Nous sommes donc ramené à résoudre deux inéquations :

(3) résoudre  $-2x - 3 \leq 4$  dans l'intervalle  $\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right]$

(4) résoudre  $2x + 3 \leq 4$  dans l'intervalle  $\left[ -\frac{3}{2}, +\infty \right[$

**2<sup>ème</sup> étape :** résolution des inéquations dans IR

$$-2x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2} \Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{7}{2}, +\infty \right[$$

$$2x + 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

**3<sup>ème</sup> étape :** contrôle de l'appartenance des solutions obtenues à l'intervalle envisagé

- Résolution de  $-2x - 3 \leq 4$  dans l'intervalle  $\left] -\infty, -\frac{3}{2} \right]$

$$x \in \left] -\infty, -\frac{3}{2} \right] \cap \left[ -\frac{7}{2}, +\infty \right[ \text{ donc } S_1 = \left[ -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right]$$

- Résolution de  $2x + 3 \leq 4$  dans l'intervalle  $\left[ -\frac{3}{2}, +\infty \right[$

$$x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cap \left[ -\frac{3}{2}, +\infty \right[ \text{ donc } S_2 = \left[ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cap S_2 \\ &= \left[ -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right] \cap \left[ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right] \\ &= \left[ -\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

### Autre méthode

$$\begin{aligned} |-2x-3| \leq 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3 \geq 0 \\ -2x-3 \leq 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2x-3 \leq 0 \\ 2x+3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{7}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right] \cup \left[ -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right] &\Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$S = \left[ -\frac{7}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

## 2.

- **Difficultés**

- ✓ « Suppression des barres » de la valeur absolue et prise en compte des intervalles obtenus dans la résolution des équations contenant des valeurs absolues.
- ✓ L'inégalité triangulaire.

....

- **Solutions**

- ✓ Respect des différentes étapes de la résolution
- ✓ Proposer aux élèves différents cas d'application de l'inégalité triangulaire (utilisation des distances, des nombres)

## 3.

### Définition 1

Soit  $a$  un réel, on appelle valeur absolue de  $a$ , le réel positif noté  $|a|$  tel que

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

### **Exemples :**

$$|5| = 5 \text{ car } 5 \geq 0$$

$$|2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5} \text{ car } 2 - \sqrt{5} \leq 0$$

### **Définition 2**

La valeur absolue d'un réel  $a$  est le plus grand des deux nombres  $a$  et  $-a$  cela se note

$$|a| = \text{Sup}(a; -a). \text{ (Sup. se lit le plus grand parmi... )}$$

### **Exemples**

$$|5| = \text{Sup}(5; -5) = 5 \quad |-2| = \text{Sup}(-2; 2) = 2 :$$

### **Définition 3**

La valeur absolue d'un nombre réel  $a$  notée  $|a|$ , c'est sa distance à zéro

$$|a| = d(a; 0)$$

Exemples :  $|4| = 4$  car 4 est à une distance 4 de l'origine,

$|-3| = 3$  car -3 est à une distance 3 de l'origine

## **II Fonction valeur absolue**

### **TÂCHE**

Identifier dans les schémas numérotés de 1 à 4 les courbes représentatives des fonctions :  $f : x \mapsto 1 + |x|$  ;  $g : x \mapsto |1 + x|$  ;  $h : x \mapsto |x - 1|$  ;  $k : x \mapsto |x| - 1$

### **Synthèse de la tâche**

	f	g	h	k
Numéro de la courbe	4	2	3	1

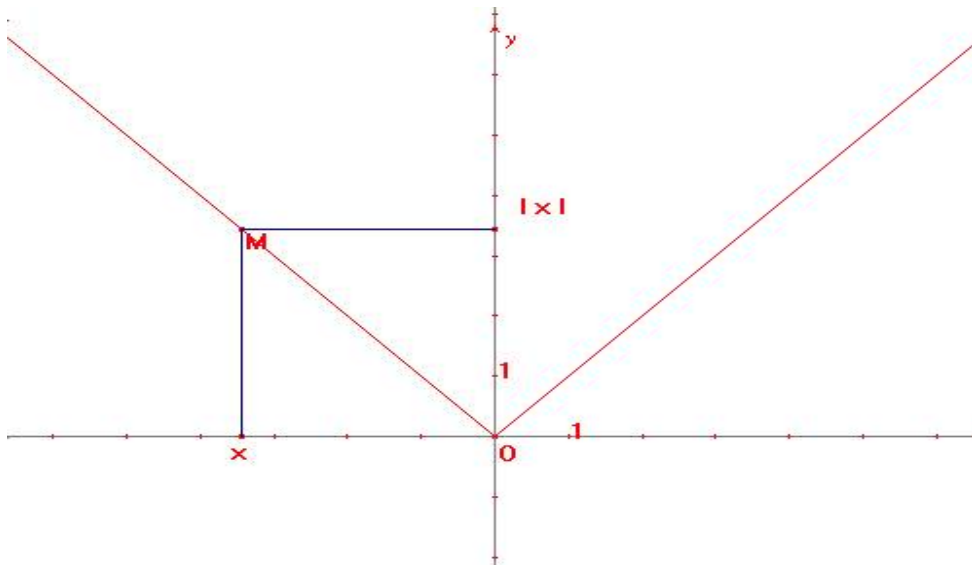
## 1. Définition

La fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x| \text{ avec } \begin{cases} |x| = x \text{ si } x \succ 0 \\ |x| = -x \text{ si } x \prec 0 \\ |x| = 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est appelée fonction **valeur absolue** car tout réel a pour image sa valeur absolue.

## 2. Représentation graphique





## **Exemple de plan de leçon ASEI**

**Thème** : Activités numériques

**Sous- thème** : La valeur absolue d'un nombre réel

**Titre de la leçon** : Définition de la valeur absolue d'un nombre réel

**Classe** : 4<sup>ème</sup>      **Effectif** : 48 élèves

**Durée** : 55mn

### **Justification**

La valeur absolue intervient dans certains domaines comme les sciences physiques (avec les calculs d'erreurs commises lors des mesures), les mathématiques (avec la résolution de certaines équations).

### **Objectifs:**

A la fin de la leçon, l'apprenant doit être capable de :

- déterminer la valeur absolue d'un nombre réel donné.

### **Connaissances pré requises**

Détermination graphique de l'image d'un réel par une fonction

### **Matériel didactique**

Feuille d'activité élève, ensemble géométriques

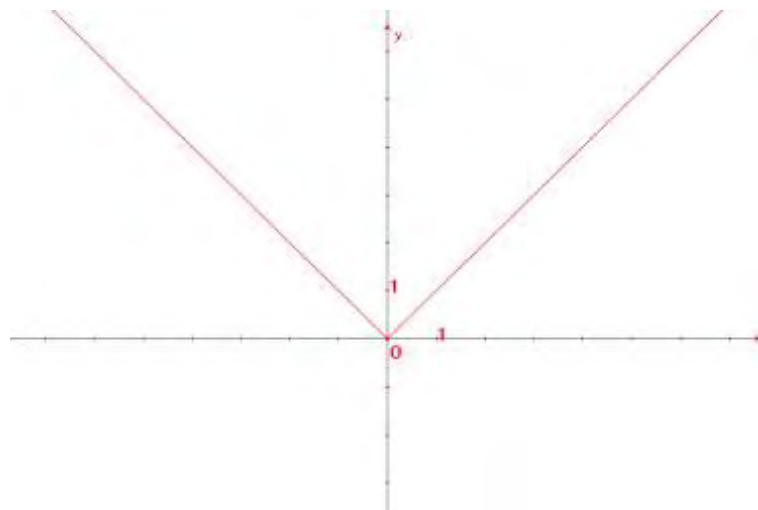
**Référence:** CIAM 4<sup>ème</sup> pages 97-98 -99

Etape /durée	Activités pédagogiques		Points d'apprentissage	Observations
	Activités du professeur	Activités de l'élève		

<p>Introduction (10mn)</p>	<p>1°) Le professeur demandera aux élèves de placer deux points A et B de coordonnées connues dans le repère. 2°) Le professeur placera deux points C et D sur la courbe et demandera aux élèves de donner les couples de coordonnées de ces points</p>	<p>Les élèves répondent aux questions</p>	<p>Représentation graphique d'un point</p> <p>Détermination graphique de l'image d'un réel par une fonction</p>	
<p>Motivation</p>	<p>Le professeur mettra l'accent sur l'importance des fonctions et l'enrichissement du vivier.</p>	<p>Le prof répartit les élèves en 8 groupes et leur distribue la fiche d'activité (voir en annexe). Le prof contrôle et guide les travaux de groupe.(15mn) Le prof demande aux élèves de restituer leurs travaux de groupe. (15mn) Le prof élabore la synthèse avec la participation des élèves.</p>	<p>Les élèves exécutent les activités en groupes.</p> <p>Les groupes restituent leurs travaux et les apprenants participent à l'élaboration de la synthèse.</p>	<p>La définition de la valeur absolue</p>
<p>Développement de la leçon (35mn)</p>	<p>Le prof récapitule et demande aux élèves d'écrire la synthèse dans leur cahier d</p>	<p>Les élèves recopient le résumé</p>	<p><u>Définition</u> soit <math>x</math> un nombre réel, la valeur absolue de <math>x</math> (notée <math> x </math>) est le nombre positif défini par :</p> $\begin{cases}  x  = x & \text{si } x \geq 0 \\  x  = -x & \text{si } x < 0 \\  x  = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$	
<p>Conclusion (5mn)</p>	<p>e cours.</p>	<p>Les élèves recopient le résumé</p>	<p>Détermination de la valeur absolue de quelques réels.</p>	
<p>Evaluation (5mn)</p>	<p>Le prof donne l'exercice d'application suivant aux élèves : déterminer Les valeurs absolues des nombres suivants: <math> 56 ;</math> <math> -75 ;  +4 ;  3,14 - \pi ;  x^2 ;  -x^4 ;  (-5)^2 ;  -2 - \frac{1}{2} ;</math></p>	<p>Les élèves traitent l'exercice</p>	<p>Détermination de la valeur absolue de quelques réels.</p>	

Exercice d'approfondissement : exercice n° CIAM 4<sup>ème</sup>

## Fiches d'activités



1- Examiner la courbe ci – dessus de la fonction  $f$  et Compléter le tableau suivant

$x$	$f(x)$
1	
2	
3	
0	
-1	
-2	
-3	

- 1- Donner  $f(x)$  si  $x$  est positif
- 2- Donner  $f(x)$  si  $x$  est négatif

### **Conclusion**

La maîtrise de la notion de valeur absolue est importante pour la résolution de certaines équations et l'étude de certaines fonctions. Il est donc nécessaire que les enseignants accordent plus d'attention à son enseignement apprentissage.