RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX DANS L'ENSEIGNEMENT / APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES

SELON L'APPROCHE ASEI / PDSI

FORMATION NATIONALE 2015

LIEU:

Centre NATIONAL DE MAINTENANCE

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

THEME : L'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

Compilé par les formateurs :

DE

MATHEMATIQUES

Justification

La démonstration est l'activité essentielle de l'enseignement/apprentissage des mathématiques car la plupart du temps l'enseignant est appelé à se convaincre, et à convaincre ses apprenants, de la véracité d'un résultat (propriété, théorème,…), dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques.
Cependant cette activité reste un des points les plus délicats de l'enseignement, aussi bien pour les professeurs que pour les élèves.
D'où la nécessité d'introduire au programme de cette session de formation ce module qui permettrait aux enseignants d'améliorer l'apprentissage de cette activité dans les classes du secondaire.

Objectif général :
Rendre l'apprentissage de la démonstration plus agréable dans les classes du secondaire.

Objectifs spécifiques

A la fin de cette séance les participants doivent être capables de :

- Définir le mot démonstration ;
- Utiliser correctement le vocabulaire de la logique ;
- Distinguer les différents types de démonstration ;
- Appliquer les différents types de démonstration à la géométrie et à la trigonométrie ;
- Remédier aux fréquentes erreurs commises par les apprenants lors de l'apprentissage d'une démonstration.

Plan du travail

Introduction

1. Définition.
2. Logique mathématique.
3. Différents types de démonstration
4. Critères d'une démonstration
5. Classification et remédiations des erreurs dans l'apprentissage de la démonstration.

Conclusion

Introduction

Selon les programmes en vigueur l'apprentissage de la démonstration doit se faire de façon progressive et en continuité d'un niveau à un autre. On retrouve, en effet, cette progression dans les programmes avec une gradation croissante des termes suivant le niveau : on part de "courtes séquences déductives " et de "justifier ces affirmations " en sixième pour atteindre "élaborer et rédiger des démonstrations " à partir de la troisième en passant par "….doivent favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration " en quatrième.
L'apprentissage de la démonstration a pour objectifs entre autres de :

- donner du sens à une phrase,
- donner du sens à un théorème,
- préparer à l'utilisation d'un théorème,
- apprendre à écrire des mathématiques,

- donner du sens aux mathématiques,
- changer le statut des figures,

Cette gamme d'objectifs montre l'obligation pour les enseignants d'avoir un minimum de formation sur la démonstration.

Tâche 1

1. Qu'est ce qu'une démonstration?
2. Quelles différences y a-t-il entre montrer, prouver, démontrer ,justifier?

Eléments de réponse de la tâche 1

1. Définition

J.HOUDEBINE propose une définition de la démonstration : « la démonstration est un texte argumentatif spécifique des mathématiques dont la sémantique est liée à la résolution de problèmes et à la preuve ».

En mathématiques, une **démonstration** est un raisonnement qui permet, à partir de certains axiomes, d'établir qu'une assertion est nécessairement vraie.

Dans les livres, on rencontre différentes consignes. On demande de montrer, de prouver, de justifier, d'expliquer, de démontrer… Qu'est-ce que l'enseignant doit exiger de l'apprenant à chacune de ces consignes ? Comment l'apprenant doit il interpréter ces consignes ?

Toutes ces consignes n'ont pas la même signification. Jacqueline Guichard (statut et fonctions de la démonstration en mathématiques : quelques repères. IREM de Poitiers, juin 1993) différencie ces consignes de la façon suivante :

Montrer, c'est le terme le plus général. Il s'étend des opérations les plus simples, depuis la simple mise sous le regard (sens étymologique), jusqu'à la démonstration.

Prouver a un sens plus général que démontrer : une démonstration établit une preuve, mais toute preuve n'est pas de l'ordre de la démonstration (par exemple : preuve expérimentale).

Tâche 2 : Donnez les différents symboles que vous utilisez dans une démonstration et la signification de chacun d'eux.

Eléments de réponse à la tâche 2

2. Logique mathématique

2.1. Les quantificateurs

Dans le raisonnement Mathématique on utilise certains symboles appelés quantificateurs. On distingue deux types de quantificateur : le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

- ✓ **Le quantificateur universel**

On sait que « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ». « Pour tout » est appelé le quantificateur universel. On le note $\forall$ et se lit aussi : 'quel que soit.' Ainsi on écrit :

$\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

- ✓ **Le quantificateur existentiel**

Peut-on alors dire que l'égalité $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ n'est pas vraie, car pour x = 1, elle ne l'est pas. Cependant elle est vraie pour x=0. Donc « il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ ».

« Il existe » est appelé le quantificateur existentiel.

on le note $\exists$. Ainsi on peut lire $\exists\, x \in$ ° tel que $(x+1)^2 = x^2 + 1$

Ordre des quantificateurs
Dans une phrase mathématique l'ordre des quantificateurs est important.
Exemple
Une exception toutefois : lorsque les deux quantificateurs se suivent et sont identiques, l'ordre dans lequel on les écrit n'a pas d'importance.

Exemple « Il existe $x \in \mathbb{R}$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ » et « Il existe $y \in \mathbb{R}$ et il existe $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$ » sont les mêmes phrases.
Règle Etant donnée une propriété Q qui peut être vérifiée par des éléments x d'un ensemble A, la négation de

- « quantificateur $x \in A$ tel que x vérifie la propriété Q » est « $\forall x \in A$, x ne vérifie pas la propriété Q ».
- « $\forall x \in A$, x vérifie la propriété Q » est « $\exists\, x \in A$ tel que x ne vérifie pas la propriété Q ».

2.2. Implication et équivalence

2.2.1 Définitions et notations

• Une implication est une phrase indiquant qu'une donnée A entraîne (ou implique) une conclusion B. Dans ce cas, on note « Si A alors B. » ou « $A \Rightarrow B$ ».
• Lorsque l'implication « Si A alors B. » est vraie, il arrive que son implication réciproque « Si B alors A. » soit également vraie. Dans ce cas, on dit que A et B sont équivalentes et on note « A , si et seulement si, B. » ou « $A \Leftrightarrow B$ ».

On sait que : tout entier naturel multiple de 6 est multiple de 3.
On peut aussi le formuler de la manière suivante :
$\forall\, n \in$ N, si n est multiple de 6, alors n est multiple de 3 ou encore dans N, « être multiple de 6 » implique « être multiple de 3 ». On le note : « être multiple de 6 » $\Rightarrow$ « être multiple de 3 »

2.2.2. Condition nécessaire, condition suffisante

L'énoncé $(P \Rightarrow Q)$ n'est faux que lorsque P est vrai et Q est faux. L'implication $(P \Rightarrow Q)$ est vraie dans tous les autres cas.
Cela conduit à d'autres formulations de l'implication $(P \Rightarrow Q)$:
– P implique Q;
– si P est vrai, alors Q est vrai ;
– pour que Q soit vrai, **il est suffisant que P soit vrai** (ou encore il suffit que P soit vrai) ;
– pour que P soit vrai, **il est nécessaire que Q soit vrai** (ou encore il faut que Q soit vrai).

2.3. Vocabulaire du raisonnement logique

Toute assertion est soit vraie (V), soit fausse (F). Etant données deux assertions P et Q, on définit de nouvelles assertions par leurs valeurs de vérité selon le tableau suivant :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
non P	F	F	V	V
Pet Q	V	F	F	F
Pou Q	V	V	V	F
P $\Rightarrow$Q	V	F	V	V
P $\Leftrightarrow$ Q	V	F	F	V

Proposition 1 :
Les assertions P $\Rightarrow$ Q et [(non P) ou Q] sont identiques.
Preuve: Il suffit d'écrire les valeurs de vérité

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P$\Rightarrow$Q	V	F	V	V
non P	F	F	V	V
(non P) ou Q	V	F	V	V

Tache : En utilisant les tables de vérités, vérifier les propriétés suivantes
Eléments de réponses de la tache

Proposition 2 :
- ✓ non (non P) = P.
- ✓ non (P ou Q) = non (P) et (non Q).
- ✓ non (P et Q) = (non P) ou (non Q).

.
Exemples : ``Ali est beau et intelligent'' a pour négation ``Ali est laid ou il est bête''.
``Moussa est beau ou intelligent'' a pour négation `` Moussa est laid et est bête''.

Proposition 3 :

- ✓ P et (Q ou R) = (Pet Q) ou (P et R)
- ✓ P ou (Q et R) = (P ou Q) et (P ou R)

Proposition 4 :
Les assertions P $\Leftrightarrow$ Q et [(P$\Rightarrow$Q) et (Q$\Rightarrow$ P)] sont identiques.

Proposition 5:

Les assertions [P⇒Q] et [non Q ⇒ non P] sont identiques.
La dernière assertion s'appelle la contraposée de [P⇒Q]. Elle est parfois plus facile à démontrer.
Exemple : Montrons que n^2 pair ⇒ n pair. Il suffit de montrer que sa contraposée est vraie c'est à dire que n impair ⇒ n^2 impair

Tâche 3

Donnez les différents types de démonstration et donnez en les principes et les différentes étapes.

Eléments de réponse de la tâche 3

3. Les différents types de démonstration

	Nature	Principe	Etapes
1er type	Démonstration directe (ou par déduction)	Elle consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.	**1ère étape :** identifications des hypothèses et la conclusion **2ème étape** : On procède par chaînon en utilisant des propriétés du cours. **3ème étape** : On conclut en écrivant la conclusion
2ème type	Démonstration par l'absurde	Elle consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée et de montrer qu'on aboutit alors à une contradiction (impossibilité).	**1ère étape :** identifications des hypothèses et la conclusion **2ème étape** : contraire de la proposition énoncée **3ème étape** :On procède par chaînon en utilisant des propriété du cours pour aboutir à une contradiction
3ème type	Démonstration par récurrence	Elle consiste à démontrer la proposition énoncée (par exemple un théorème) en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.	Une démonstration par récurrence contient toujours trois étapes : 1. **L'initialisation** : c'est la vérification de *P* (n_0). Il ne faut jamais l'oublier ! où n_0 est le plus petit indice 2. **La récurrence proprement dite** : on suppose que la propriété *P*(*n*) est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer *P*(*n*+1) à partir d'elle. 3. Conclusion
4ème type	démonstration par contraposée	Elle consiste pour démontrer que si P est vrai alors Q est vraie (P => Q) par la contraposée (non P => non Q) qui est équivalente et souvent beaucoup plus facile à démontrer.	

5ème type	preuve par l'exemple	elle consiste à valider une propriété existentielle sous certaines conditions, une proposition universelle peut être prouvée par un ou plusieurs exemples bien choisis.	
6ème type	contre-exemple	elle consiste à invalider une propriété universelle à travers un cas particulier (contre-exemple) l'infirmant.	

4. Critères d'une démonstration

D'une façon générale, en mathématiques l'histoire est marquée par de longues périodes où les mathématiciens de l'époque ont rencontré de fortes difficultés à établir certaines propriétés. Pour aider à établir des preuves valides, c'est à dire qui ne soient pas contestées par d'autres, les mathématiciens ont défini des règles : les critères de la démonstration mathématique.

Critère 1 : Une propriété qui n'est pas toujours vraie est fausse.

Critère 2 : Une série d'essais réussis n'est pas acceptable comme argument pour prouver. Une série d'essais ou des exemples qui marchent ne permettent que d'émettre une conjecture à démontrer.

Critère 3 : Pour une situation donnée, seules les informations formulées de façons explicites dans l'énoncé ou codées sur une figure (hypothèses) sont à prendre en considération pour le raisonnement. Des informations non explicites mais qui apparaissent sans être codées sur un dessin ne sont pas valables si elles sont utilisées dans un raisonnement.

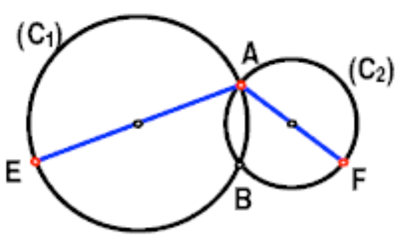
Critère 4 : A partir de données d'une situation on peut déduire de nouvelles informations en utilisant une ou plusieurs propriétés prises dans un ensemble de propriétés validées précédemment. Une propriété connue ne peut être utilisée que si les conditions requises par cette propriété sont présentes dans la situation donnée.

Critère 5 : Une proposition pour laquelle on n'a pu trouver ni preuve, ni contre exemple reste à décider.

Tâche 4

Utiliser le type de démonstration le mieux indiqué pour résoudre les problèmes suivants :

Exercice 1



(C1) et (C2) sont deux cercles distincts [AE] est un diamètre du cercle (C1) et [AF] est un diamètre du cercle (C2). Les points A et B sont les deux points d'intersections des cercles (C1) et (C2). Les points E, F et B sont-ils alignés ?

Exercice 2 :
Soit un cercle de centre A. Soient [MU] un de ses diamètres et O un point appartenant à ce cercle, distinct de M et de U. Que peut-on dire du triangle MOU ? **Justifier**.

Exercice 3
Soit les fonctions numériques f et g définies par : f(x) = cos(x) et g(x) = sin(x).
Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :
pour tout réel x ; $f^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $g^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Où $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont les dérivées d'ordre n de f et de g.

Exercice 4
A, B, C sont les angles d'un triangle. Démontrer que cos A + cos B + cos C = 1 + 4 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Exercice 5
α, β, γ sont les angles d'un triangle ABC quelconque. On pose BC =a; AB= c et AC= b. Démontrer que:
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Exercice 6

ABC est un triangle.

Démontrer que si cos(A) cos(B) cos(C) $\neq \dfrac{1}{8}$ alors ABC n'est pas équilatéral.

Eléments de réponse

Exercice1

Démonstration directe
Le fait de réaliser le tracé et de vérifier l'alignement est une impasse :
Si les points paraissent alignés sur le dessin, rien ne dit qu'ils le sont en réalité :
Si les points ne sont pas alignés sur le dessin, rien ne dit que cela n'est pas dû à l'imprécision des tracés.
Une fois encore, pour montrer que les points sont alignés il faut le faire sans prendre appui sur une figure particulière : une démarche consiste à traduire les données de l'énoncé pour utiliser une ou plusieurs propriétés attestées afin de déduire l'alignement des points :

[AE] est un diamètre du cercle (C_1)
B un point du cercle (C_1) distinct de A et de E
} AEB est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AE], c'est un triangle rectangle en B.

[AF] est un diamètre du cercle (C_2).
B un point du cercle (C_2) distinct de A et de F
} AFB est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AF], c'est un triangle rectangle en B.

AEB est un triangle rectangle en B donc (AB)⊥(BE)
AFB est un triangle rectangle en B donc (AB)⊥(BF)
} On en déduit :

Les droites (BE) et (BF) sont perpendiculaires à la même droite donc elles sont parallèles, comme elles ont un point B commun, les deux droites sont confondues et donc les points E, B et F sont alignés. Ici on a la démonstration type, qui certes est exigeante sur la forme mais qui garantit une preuve valide.

Exercice2

Démonstration directe

Le triangle MOU est inscrit dans le cercle de diamètre [MU].

$2^{ème}$ ETAPE — On cherche une propriété qui fasse le lien.

Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle **alors** ce triangle est rectangle.

$3^{ème}$ ETAPE — On en déduit un nouveau résultat.

Conclusion : On peut affirmer que le triangle MOU est rectangle.

Remarques

1) Dans la première étape, il est important de bien identifier la situation en se posant les questions suivantes :
a) Avec quelle(s) figure(s) je travaille ?
b) Y a-t-il des objets géométriques importants (droites, points, segments, …) ?
c) Quelles sont les données qui pourront être utiles ?
2) Comme nous l'avons vu précédemment, la deuxième étape doit faire le lien entre les données utiles et la conclusion. Il faut la formuler de façon **très rigoureuse** avec des termes précis ; par exemple : « si … alors … », « … revient à dire que … », « … si et seulement si … ».

Lorsqu'il s'agit de faire appel à des théorèmes connus, on pourra seulement mentionner leurs noms (sans faire de faute d'orthographe !). Par exemple : « D'après le théorème de Pythagore … », « Le théorème de Thalès nous permet d'écrire … », …

3) Dans une démonstration, il n'est pas recommandé de dire « je vois sur la figure que… » ou bien « j'ai vérifié avec mon compas que … » car ce vocabulaire est du domaine de l'observation. On utilisera plutôt des termes du type : « on sait que », « car », « puisque », « or », « comme »,

<u>Exercice3</u>
Démonstration par récurrence
Soit P(n) la propriété à démontrer:
- vérifions que P(n) est vraie au rang n = 1:

Pour tout réel x on a: $f^{(1)}(x) = f\,'(x) = -\sin(x) = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+1x\frac{\pi}{2})$ ce qui signifie que P(n) est vraie pour n = 1;
- soit k un entier naturel non nul. montrons que si P(k) est vraie alors P(k+1) l'est aussi:

Pour tout réel x on a $f^{(k+1)}(x) = f^{(k)}\,'(x) = \cos\,'(x+k\frac{\pi}{2}) = -\sin\,(x+k\frac{\pi}{2}) = \cos(x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+(k+1)\,\frac{\pi}{2})$.

d'où si P(k) est vraie alors P(k+1) est vraie.
D'où P(n) vraie c'est à dire que pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x :

$f^{(n)}(x) = \cos\,(x+n\frac{\pi}{2})$.

De même on établit que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x :

$g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice4

Démonstration directe

On est dans un triangle donc: A + B + C = π

$\cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$

$= \left[2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right] + \cos C$

$= \left\{2 \cdot \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{C}{2}\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right\} + \cos C$

$= \left[2 \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right] + \left[1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)\right]$ [on trouve $\cos C = 1 - 2.\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)$ en appliquant $\cos C = \cos\left(\frac{C}{2} + \frac{C}{2}\right)$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$]

$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]$

$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \left\{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\left[(\pi/2) - \left(\frac{A+B}{2}\right)\right]\right\}$ (puisque $C = \pi - (A+B)$)

$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$

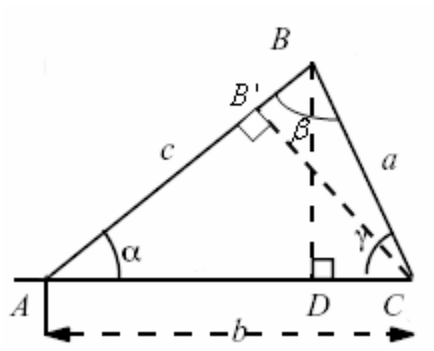
$= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right)$; application de $\cos x - \cos y = 2\sin[(x+y)/2] \cdot \sin[(y-x)/2]$.

$= 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

Exercice 5

Démonstration directe

Soit le triangle quelconque dont nous traçons deux hauteurs :



Dans le triangle ci-dessus nous avons les relations :

$\sin(\alpha) = \frac{\overline{DB}}{c} \quad \sin(\gamma) = \frac{\overline{DB}}{a}$ distance au lieu de mesure algébrique

Ce qui nous conduit à l'expression :

$$\overline{DB} = c\sin(\alpha) = a\sin(\gamma)$$

D'où :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Par un raisonnement similaire nous avons :

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CB'}}{b} \qquad \sin(\beta) = \frac{\overline{CB'}}{a}$$

Ce qui donne :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Le tout combiné nous fournit:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Exercice 6

Démonstration par contraposition :
Démontrer cette propriété revient à démontrer sa contraposée c'est-à-dire :

Si ABC équilatéral alors cos(A)cos(B)cos(C) $=\frac{1}{8}$

Supposons que ABC est équilatéral, ce qui signifie que mes(A) = mes(B) = mes(C) = $\frac{\pi}{2}$, par suite cos(A) = cos(B) = cos(C) $=\frac{1}{2}$ et enfin cos(A)cos(B)cos(C) $=\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Tâche 5

Classifiez les erreurs que commettent les élèves dans l'apprentissage de la démonstration et proposez des remédiations

Eléments de réponse à la tâche 5

5. Classification et remédiation des erreurs dans l'apprentissage de la démonstration

Les erreurs et les obstacles rencontrés dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie sont directement liés à leur cause. J.P MULLER distingue cinq causes possibles

(JP MULLER Repères IREM n°15, 1994).

Tout d'abord le statut de la figure :

Tout au long de la scolarité des élèves au collège, le statut de la figure évolue. En sixième ou même en début de cinquième la figure a un statut de preuve. Les élèves sont capables de reconnaître sur une figure des parallèles ou des perpendiculaires. La reconnaissance visuelle des objets suffit pour démontrer. En quatrième ce statut change complètement ; la figure géométrique ne doit plus être considérée comme une preuve ou comme la représentation de la réalité physique mais comme la représentation d'un modèle mathématique. Pour « réussir » la construction les élèves sont obligés de raisonner sur le concept et non sur la figure.

Pour aider les élèves à opérer ce changement de statut on pourra les faire travailler sur des figures inexactes ou à main levée.

Cependant, le discours qui consisterait à dire aux élèves qu'une figure ne sert pas pour démontrer, serait dommageable car en réalité la figure est une étape très importante dans la démonstration puisqu'elle intervient systématiquement dans l'approche de la résolution de problèmes et c'est elle qui donne « l'idée » du cheminement de la preuve.

Les illusions et le problème des mesures :

L'élève peut commettre des erreurs en ayant une vision du problème faussée par une figure particulière ou une illusion d'optique. Une autre source d'erreurs est la mesure sur la figure avec un instrument (règle, compas, rapporteur…). Dans les deux cas, les élèves ont tendance à utiliser des hypothèses supplémentaires lues ou mesurées sur la figure, introduisant ainsi des erreurs dans la solution. Il faut pour l'enseignant créer des situations dont l'objectif est de disqualifier le dessin (et les mesures sur le dessin) en tant que preuve et faire apparaître la nécessité d'une démonstration.

Les règles du contrat didactique :

Le contrat didactique contient une grande part d'implicite. Certaines erreurs sont dues à une non-appropriation des règles spécifiques à une activité donnée : l'élève ne comprend pas ce que l'on attend de lui.

Or la démonstration en géométrie est une activité complexe soumise à certaines règles qui ne sont absolument pas évidentes pour les élèves :

- Tri des informations de l'énoncé (dégager les données qui apparaissent sous diverses formes : textes, figures, codages, etc.);
- Mobilisation et utilisations des outils mathématiques (définitions, théorèmes, propriétés…) appropriés ;
- Articulation logique de ces objets : « chaînon déductif », qui utilise des règles particulières différentes d'un discours argumentatif (par exemple en français)).

La multiplicité des tâches à gérer simultanément (faire une figure, dégager les données de l'énoncé, rechercher les « bonnes » propriétés, trouver un « schéma de résolution, rédiger la réponse) est non seulement une source d'erreurs pour les élèves mais peut aussi bloquer complètement certains d'entres eux. Pour remédier à cette situation, l'enseignant doit essayer de clarifier les règles régissant le contrat didactique et mettre en place des situations où les différentes tâches seront séparées.

La difficulté de mobiliser les connaissances :

Devant un problème de géométrie, une des difficultés rencontrées par les élèves est de « savoir quoi faire ? ». Quelle connaissance doit-on utiliser pour résoudre tel problème ?

Les élèves ont des difficultés à trouver dans l'énoncé les indices qui conduisent à utiliser la « bonne propriété ». Un travail d'organisation des connaissances en îlots déductifs (c'est-à-dire que les élèves doivent faire un lien immédiat entre une situation et un concept, par exemple : points équidistants des extrémités d'un segment et médiatrice de ce segment ; milieu d'un segment et symétrie centrale ; triangle rectangle et théorème de Pythagore, etc.) peut aider à débloquer les élèves devant un problème compliqué. Ou encore un travail de recherche de configurations connues (parallélogrammes, configuration de Thalès, Pythagore, etc.) dans une figure plus compliquée peut être mis en place.

Enfin, proposer des activités d'analyse systématique des énoncés peut également être utile pour faire apparaître clairement les hypothèses et les questions, et donc faciliter le travail de recherche des connaissances à mobiliser.

Enfin, les obstacles linguistiques :

Un des objectifs du collège est l'acquisition d'un langage correct permettant aux élèves de comprendre et de se faire comprendre. En quatrième cet objectif est loin d'être atteint, il n'est donc pas surprenant que les élèves aient des difficultés à rédiger une démonstration ou à comprendre l'énoncé d'un problème de géométrie.

L'énoncé d'un problème de géométrie contient des informations que les élèves doivent analyser pour pouvoir résoudre le problème. Ces énoncés sont, en général, complexes tant grammaticalement qu'au niveau du vocabulaire employé (certains mots ont deux sens différents en mathématiques et dans le langage courant).

Conclusion

L'apprentissage de la démonstration, comme toutes les autres activités mathématiques, nécessite au niveau de l'élève une progression, des méthodes et de la répétition.

Cette progression qui commence depuis l'école primaire avec le raisonnement et la résolution de problèmes doit être consolidée en 6ème -5ème et renforcée à partir de la 4ème.

Prouver ou démontrer est l'activité essentielle du mathématicien. C'est le moyen qu'il a de se convaincre, de convaincre ses pairs et les autres, de la véracité d'un résultat, dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques.