TROISIEME CYCLE DE FORMATION DES FORMATEURS REGIONAUX

RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX DANS L'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES SELON L'APPROCHE ASEI/PDSI

LIEU : CENTRE NATIONAL DE MAINTENANCE (CNM) / NIAMEY

DATES :

DU 05 AU 14 Janvier 2009
DU 16 AU 25 Février 2009

THEME : LES TRANSFORMATIONS DU PLAN.

COMPILE PAR LES FORMATEURS NATIONAUX DE MATHEMATIQUES

Niamey, décembre 2008

Thème: Les transformations du plan

JUSTIFICATION

L'histoire des transformations est relativement récente. En effet, géomètres et mathématiciens ne se sont vraiment intéressés à ces applications qu'à la fin du XVIII^{e} siècle. C'est à cette période que les français Jean Victor Poncelet et Michel Chasles voient en elles de nouveaux outils de démonstration.

Les transformations du plan jouent un rôle important dans la démonstration en géométrie. Elles permettent d'initier les élèves au raisonnement déductif et de proposer des modèles dans l'industrie.

BUT DE LA FORMATION:

Approfondir la réflexion des participants sur les transformations du plan.

OBJECTIFS

- Identifier quelques difficultés liées à l'enseignement/apprentissage des transformations du plan.
- Réaliser des activités sur les transformations qui soient transférables en classe.
- Résoudre des problèmes de géométrie plane et de construction à l'aide des transformations étudiées au premier cycle du secondaire.
- Elaborer un plan de leçon

PLAN DE PRESENTATION DU THEME

Introduction

I Etude des propriétés des transformations du plan et Classification.

II Utilisation des transformations pour construire et démontrer.

III Plan de leçon sur l'homothétie.

Conclusion

Introduction

Les transformations du plan sont des applications bijectives du plan dans lui-même dont l'étude permet aux élèves de parfaire l'utilisation des instruments de mesure et de dessin et conjointement de s'entraîner au raisonnement déductif. Pour ce faire une bonne implication des apprenants dans l'installation de ces outils mathématiques est nécessaire.

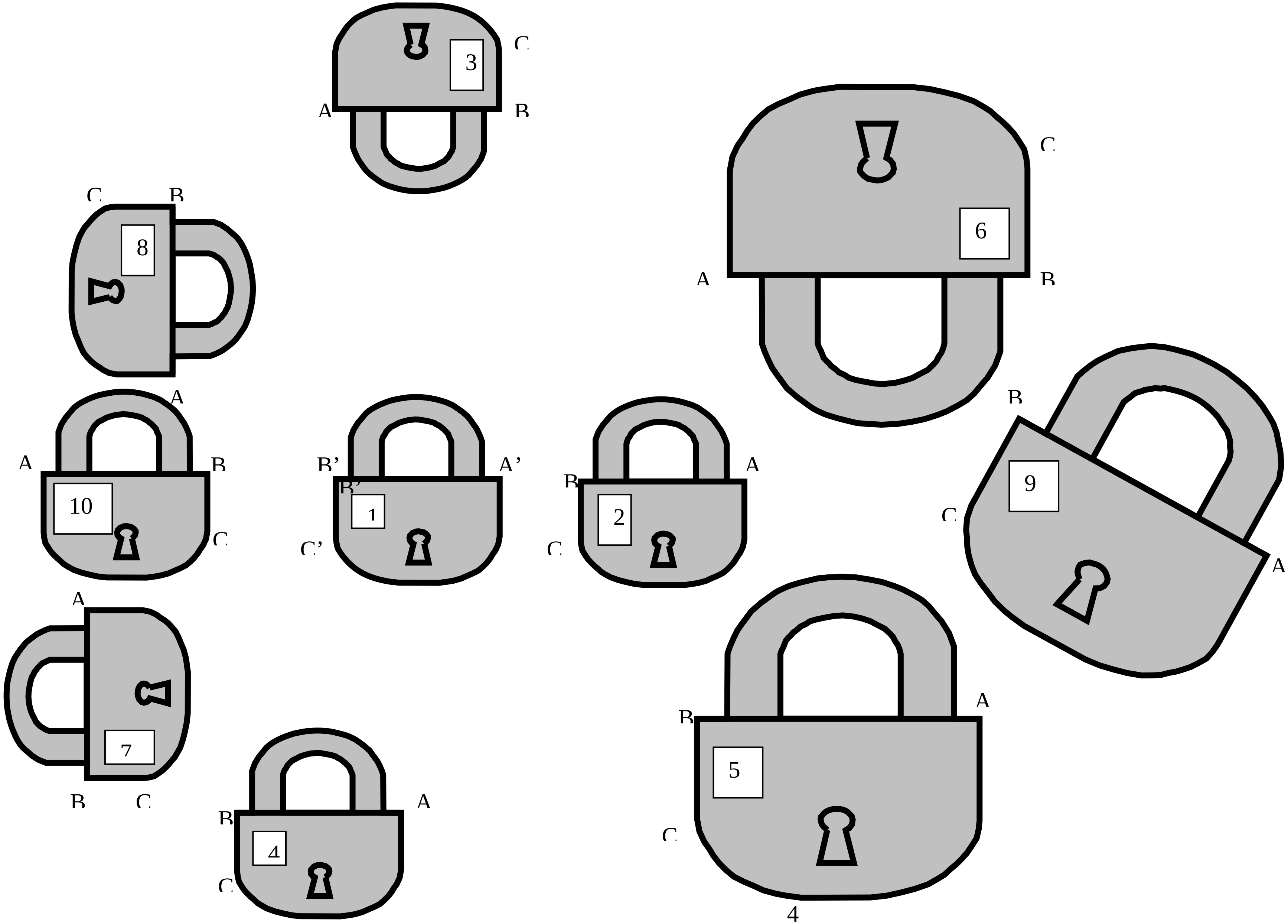
Les transformations du plan étudiées au premier cycle du secondaire sont: les translations, les rotations, les symétries et les homothéties. Quels sont les problèmes que les enseignants rencontrent dans l'enseignement de ces transformations au collège? Comment utiliser ces transformations pour résoudre des problèmes de géométrie?

I. Etude des propriétés des transformations du plan.

<u>Tâche :</u> Etude des propriétés des transformations

Le dessin 1 étant donné :

1) pour chacun des autres dessins, déterminer si il existe une application bijective qui transforme le dessin 1 au dessin choisi ;
2) pour chaque application trouvée, déterminer l'ensemble des points invariants ;
3) Pour les dessins ayant les mêmes dimensions que le 1, examiner le lien qui existe entre les angles $\widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ABC}$.


3
A
B
C
8
C
B
6
A
B
C
10
A
A
B
C
1
B’
A’
B’
C’
2
B
A
C
9
B
C
A
7
A
B
C
4
B
A
C
5
B
A
C

<u>Eléments de réponse</u>

1) Les applications bijectives

- Du 1 au 2 : translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$.
- Du 1 au 3 : symétrie centrale de centre le milieu [A'A].
- Du 1 au 4 : translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$
- Du 1 au 5 : homothétie
- Du 1 au 6 : similitude
- Du 1 au 7 : rotation
- Du 1 au 8 : rotation
- Du 1 au 9 : similitude
- Du 1 au 10 : symétrie orthogonale

2) Points invariants

- Translation de vecteur non nul : aucun point invariant
- Symétrie centrale : un point invariant, le centre de symétrie.
- Homothétie : un seul point invariant, le centre de l'homothétie.
- Similitude directe (différente de la translation) : un point invariant.
- Rotation d'angle non nul : un seul point invariant, le centre de la rotation.
- Symétrie orthogonale : tout point de l'axe de symétrie.

3) Lien qui existe entre les angles $\widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ABC}$

Les dessins qui ont les mêmes dimensions que le dessin 1 sont les dessins 2, 3, 4, 7, 8, 10.
1 et 2 : les angles sont égaux.
1 et 4 : les angles sont égaux.
1 et 8 : les angles sont égaux.
1 et 7 : les angles sont égaux.
1 et 3 : les angles sont opposés.
1 et 10 : les angles sont opposés.

1) Transformations usuelles

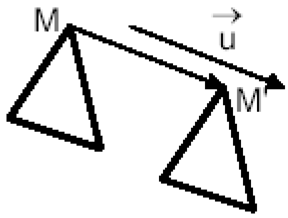
Définition

Une application *f* du plan dans lui-même est bijective si et seulement si tout point M' est l'image par *f* d'un point unique M. Une application bijective du plan dans lui-même est appelée une transformation.
L'application g du plan dans lui-même tel que gof =id est la transformation réciproque de f.

a) Translation

Définition

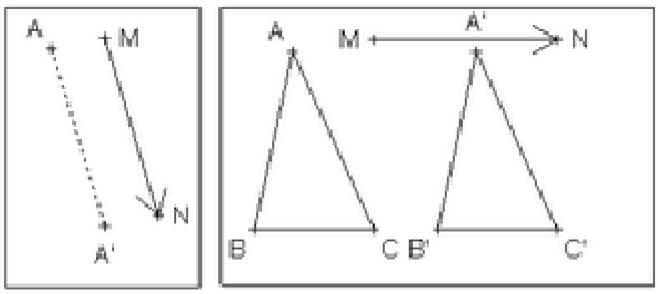
$\vec{u}$ étant un vecteur du plan. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application du plan qui à chaque point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



Notons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. $t_{\vec{u}}(M) = M'$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Exemples:

Translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

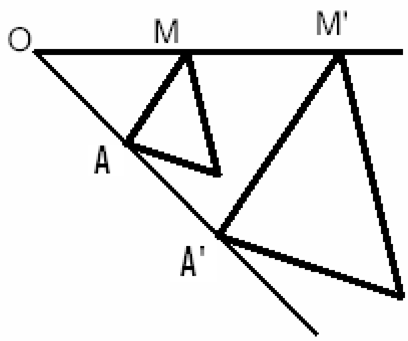


Propriétés

- Si A et B ont respectivement pour image A'et B' alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.
  A'B' = AB
- L'image d'une droite est une .droite qui lui est parallèle.
- Une translation de vecteur non nul n'a pas de point invariant.
- La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
  $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

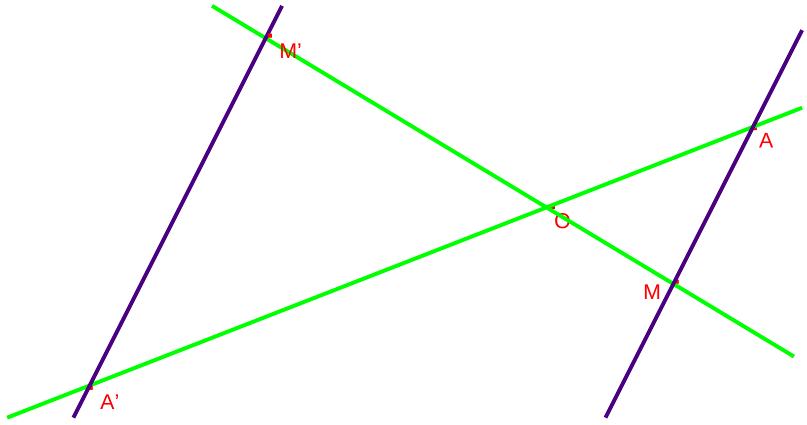
b) Homothétie (agrandissement/réduction)

Définition



Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Soit h (O, k) l'homothétie de centre O et de rapport k. h (M) = M' signifie que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

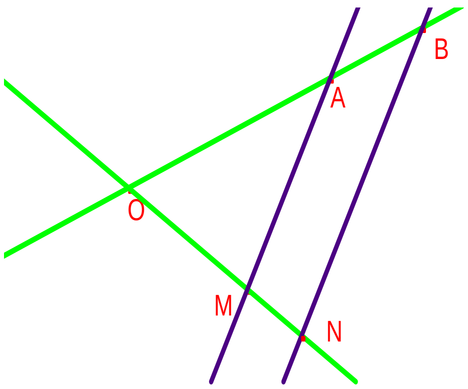


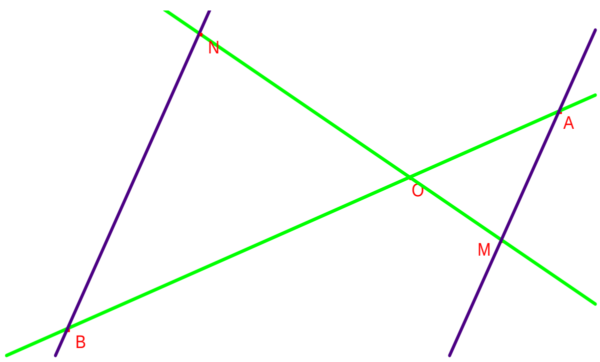
Définition admise au collège:

O et A sont deux points distincts, O, A et B sont trois points alignés

L'homothétie de centre O qui transforme A en B est l'application du plan qui à tout point M associe le point N tel que :

- si M=O alors N=O
- si $M \neq O$ alors O, M et N sont alignés et (AM) // (BN)





Rapport d'une homothétie

O et A sont deux points distincts, O, A et B sont trois points alignés.

h est l'homothétie de centre O qui transforme A en B.

- si A et B sont situés du même côté de O, on appelle rapport de l'homothétie h le nombre $k = \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$
- si A et B sont de part et d'autre de O, on appelle rapport de l'homothétie

h le nombre $k = -\frac{\text{OB}}{\text{OA}}$

Propriétés

- Un point et son image sont alignés avec le centre O.
- Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan.
- Une homothétie de rapport –1 est une symétrie centrale.
- Les homothéties conservent :
    - les rapports de longueur
    - l'alignement des points
    - les milieux
    - le parallélisme
    - l'orthogonalité
    - les barycentres
    - les angles orientés
- Par une homothétie de rapport *k* :
    - l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
    - l'image d'un plan est un plan qui lui est parallèle ;
    - l'image du cercle de centre A et de rayon *r* est le cercle de centre A', image de A, et de rayon r $|k|$.
- La réciproque de l'homothétie de h (O, k) est l'homothétie $h\left(O \quad \frac{1}{k}\right)$.

$$h^{-1}(O, \quad k) = h\left(O \quad \frac{1}{k}\right)$$

C) Rotation

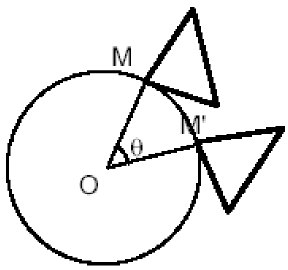
Plan orienté

Orienter le plan c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens. Par convention on choisit le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens direct (ou positif ou trigonométrique).

Définition

O étant un point et α un réel. On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan qui à chaque point M du plan associe le point M' tel que:

$$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{OM'}\right) = \alpha\,(2\pi) \end{cases}$$

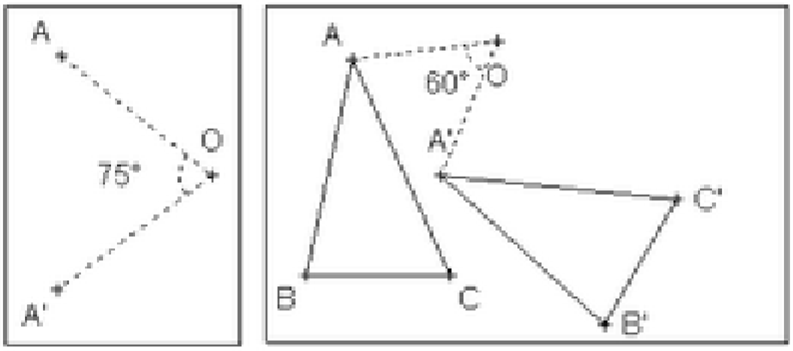


Notons r la rotation de centre O et d'angle θ.

r (M) = M' signifie que: OM = OM' et $\overline{\left(\vec{OM} \quad \vec{OM'}\right)}$ = θ

Exemples

Rotation de centre O et d'angle 75° / Rotation de centre O et d'angle 60°.



Définition au collège

O étant un point du plan et α un nombre positif. On appelle rotation de centre O et d'angle α pris dans le sens positif, l'application du plan dans lui-même qui a tout point M associe le point M' tel que : OM' = OM et $\widehat{MOM'} = \alpha$.

Propriétés

A, B et C étant trois points qui ont respectivement pour image A', B' et C'dans la rotation de centre O et d'angle α.

- A'B'=AB
- Les rotations conservent les angles orientés : $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Le seul point invariant est le centre.
- La réciproque de la rotation r de centre O et d'angle α est la rotation de centre O et d'angle - α. r^{-1}(O; α) = r (O; - α).
- *f est* une transformation telle que, pour tous points M et N et leurs images respectives M' et N', on a : $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \theta$ (non nul) et MN = M'N', si et seulement si f est une rotation d'angle θ.

d) Symétrie par rapport à une droite

- **Définition**

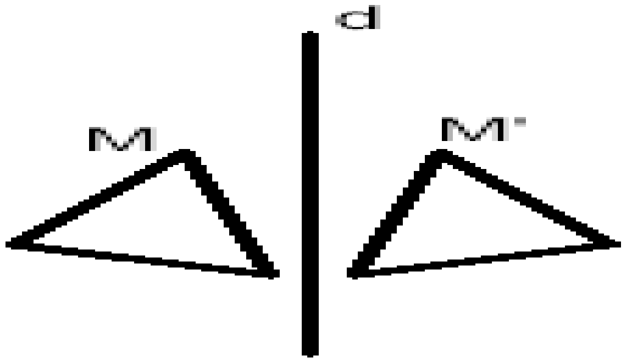
Soit deux droites sécantes (d) et (d').

On appelle symétrie par rapport à la droite (d) parallèlement à la droite (d') l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que (MM') parallèle à (d') et le milieu I du [MM'] appartient à la droite (d).

- **Cas particulier** : Symétrie orthogonale (ou réflexion):

- **Définition**

(d) étant une droite, on appelle symétrie orthogonale par rapport à la droite (d) l'application du plan qui à chaque point M du plan associe l'unique point M' tel que (d) soit la médiatrice de [MM'].

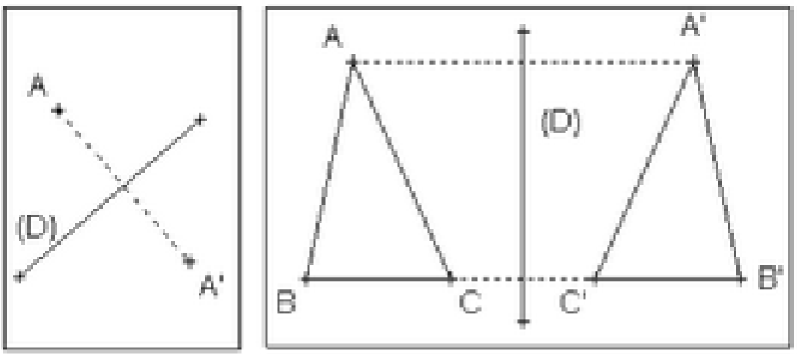


Notons s_d la symétrie orthogonale par rapport à la droite (d).

$S_d(M) = M'$ signifie que: $\begin{cases} M = M' \text{ si } M \in (d) \\ (d) \text{ est la médiatrice de } [MM'] \text{ si } M \notin (d) \end{cases}$

- **Exemples**

Symétrie d'axe (D).



- **Propriétés**

A, B et C sont trois points qui ont respectivement pour image A', B' et C'dans la symétrie orthogonale d'axe (d).

• A'B'=AB

• Les symétries axiales ne conservent pas les angles orientés. On a

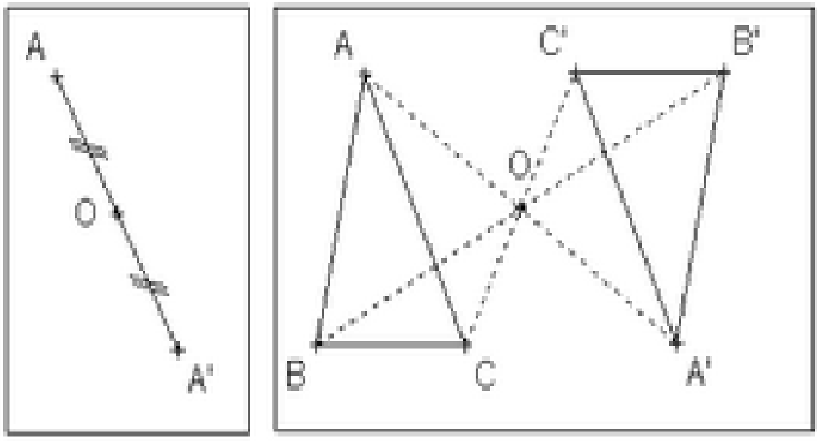
$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

• Les seuls points invariants sont les points de l'axe de symétrie.

• La réciproque de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (d) est elle même. $S^{-1}_d = S_d$

e) La symétrie centrale

Symétrie de centre O.



O étant un point. On appelle symétrie (symétrie centrale) de centre O l'application du plan qui à chaque point M du plan associe l'unique point M' tel que O soit le milieu de [MM'].

M'est l'image de M si et seulement si $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

Remarque

Notons S_o la symétrie centrale par rapport au point O.

$S_O = h(O; -1) = r(O;\pi)$.

Propriétés

- Si A et B ont respectivement pour image A' et B' alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$; par conséquent A'B' = AB et l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
- Le seul point invariant est le centre.
- La réciproque de la symétrie de centre O est la symétrie de centre O.
  $S_o^{-1} = S_o$
- La composée de la symétrie centrale de centre I, S_I et de la symétrie centrale de centre J, S_J notée $S_J \circ S_I$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

2) Isométries du plan

a) Définition

Dans le plan, une isométrie est une transformation qui conserve les distances.

b) Propriétés

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La transformation réciproque d'une isométrie est une isométrie.
- On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les angles orientés.
- On appelle antidéplacement toute isométrie qui transforme un angle

orienté en son opposé.

- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (quel que soit l'ordre) est un antidéplacement.
- Toute isométrie est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

c) Classification des isométries en fonction du nombre de points invariants

- Une isométrie qui fixe 3 points non alignés (ou qui admet 3 points invariants non alignés) est l'application identité notée Id.
- Une isométrie qui fixe deux points A et B distincts est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- Une isométrie qui fixe un seul point O est une rotation de centre O et d'angle non nul.
- Une isométrie qui n'admet aucun point invariant est soit une translation de vecteur non nul, soit une symétrie glissée (composée d'une Symétrie orthogonale d'axe (d) et d'une translation de vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}$ vecteur directeur de (d)).

3) Composée des transformations

a) Composée de deux symétries orthogonales

- La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation.
- Réciproquement : toute translation est égale (d'une infinité de manières) à la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.
- La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en O est une rotation.
- Réciproquement : toute rotation est égale (d'une infinité de manières) à la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en O, centre de la rotation.

b) Composée de deux rotations

La composée de deux rotations d'angles respectifs θ et θ' est:
- une translation si $\theta + \theta' = 0$ [2π], c'est-à-dire si $\theta + \theta' = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- une rotation d'angle $\theta + \theta'$ dans les autres cas.

c) Composée de deux homothéties

La composée de deux homothéties de centres différents, de rapports respectifs

k et *k'* est :
- une translation si *k k'* = 1 ;
- une homothétie dans les autres cas.

d) Composée d'une translation et d'une rotation

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle θ, toutes deux distinctes de l'identité du plan est une rotation d'angle θ.

e) Composée d'une translation et d'une symétrie axiale

- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe (d), lorsque $\vec{u}$ est normal à (d) est une symétrie orthogonale.
- La composée d'une symétrie orthogonale d'axe (d) et d'une translation de vecteur, $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de (d) est une symétrie glissée.
- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe (d) ($\vec{u}$ non normal à (d)) est égale à la composée d'une symétrie orthogonale d'axe (d') parallèle à (d), et d'une translation de vecteur $\vec{v}$, $\vec{v}$ vecteur directeur de (d). Ainsi toute composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation est une symétrie glissée.

f) Composée d'une translation et d'une homothétie

La composée d'une homothétie de rapport *k* (*k* ≠ 1) et d'une translation est une homothétie de rapport *k*.

g) Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soit *h* l'homothétie de centre O et de rapport *k*, et *r* la rotation de centre O et d'angle θ, alors *h* o *r* = *r* o *h*. La composée ainsi obtenue s'appelle la similitude de centre O, de rapport *k* et d'angle θ.

4) Similitudes directes du plan

a) Définition

O est un point du plan, *k* et θ sont deux réels tels que *k* > 0.
On appelle similitude directe du plan de centre O, de rapport *k*, d'angle θ, la transformation S telle que :
- S (O) = O
- Pour tout point M ≠ O, S (M) = M' avec OM' = k OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ = θ [2π].

On la note S (O, k, θ)

Cas particuliers

- Une homothétie de centre O et de rapport *k* peut être considérée comme une similitude directe fixant O :
  - si *k* > 0 alors le rapport de la similitude est *k* et une mesure de son angle est 0 ;

- si $k < 0$ alors le rapport de la similitude est $| k |$ et une mesure de son angle est π.

- Une rotation de centre O peut être considérée comme une similitude directe fixant O ; le rapport sera 1 et l’angle celui de la rotation.

b) Caractérisation

Une similitude directe est déterminée lorsqu’on connaît son centre, un point et son image.

c) Propriétés des similitudes directes

Soient la similitude directe S (O, k, θ), A et B deux points distincts du plan, A’ et B’ leurs images respectives par S.

- A'B' = k AB et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta\ [2\pi]$
- Une similitude directe conserve :
  - les angles orientés
  - l'alignement
  - le parallélisme et l'orthogonalité
  - le barycentre
- Une similitude directe transforme les droites en droites, les segments en segments et les cercles en cercles.
- Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2.
- Toute similitude S (O, k, θ) est la composée commutative de l'homothétie h(O, k) et de la rotation r(O, θ).
- La composée des similitudes S_1 (O, k_1, θ_1) et S_2 (O, k_2, θ_2) est la similitude S (O, k_1k_2, $\theta_1 + \theta_2$).
- La réciproque de la similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ est la similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle – θ.

$$S^{-1}(O, k, \theta) = S\left(O, \frac{1}{k}, -\theta\right)$$

II. Utilisation des transformations pour démontrer, construire et chercher des lieux géométriques dans le plan.

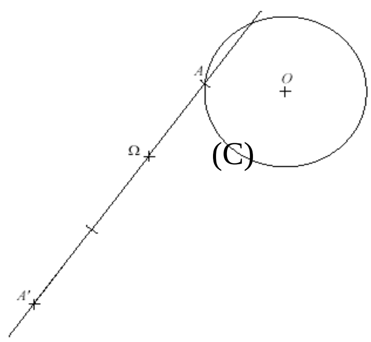
1. Utilisation des transformations pour construire

a) <u>Tâche</u>

<u>Exercice 1</u>

(C) est le cercle de centre O et de rayon r.
A est un point de (C).
Soit h l'homothétie de centre Ω transformant A en A'.

1. Construire le cercle (C') image du cercle (C) par h. (justifier)
2. Préciser le rapport de l'homothétie h.

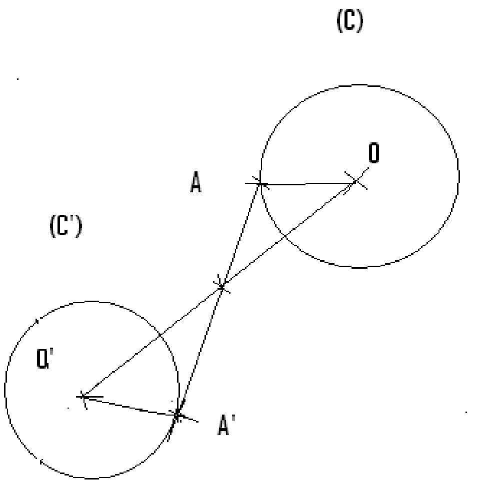


3. Dans le cas où r = 1,5 préciser le rayon du cercle (C').

Solution

1) On construit O' image de O par h en traçant la droite (OΩ) puis la parallèle à (OA) passant par A', le point O' est l'intersection de ces deux droites. Le rayon de (C') est O'A'.

2) Le rapport de homothétie h est $-\frac{\Omega A'}{\Omega A}$.

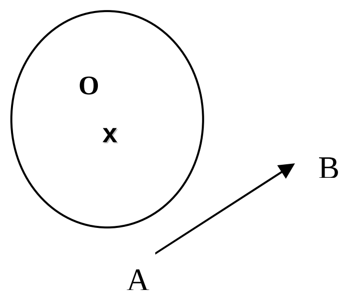


3) Le rayon de (C') est 1,5 x$\left|\frac{-\Omega A'}{\Omega A}\right|$

Exercice 2

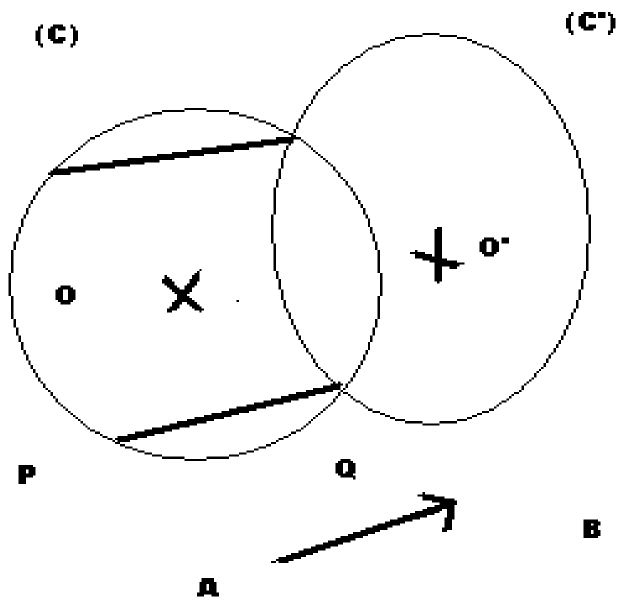
Construire des points P et Q du cercle (C) tels que: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$

Est-ce toujours possible?



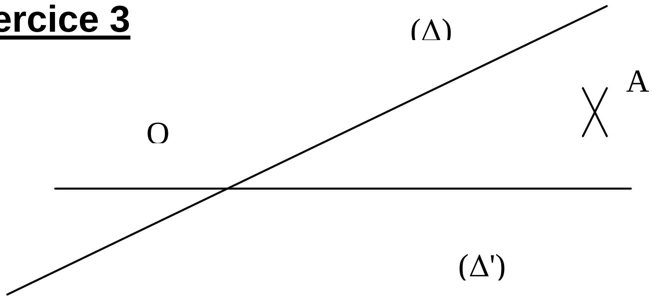
Solution

On construit le cercle (C') image de (C) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.



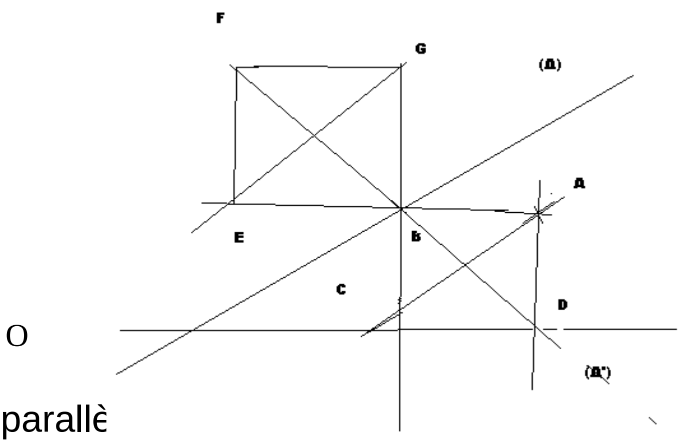
Le point Q est l’intersection de (C) et (C’). On construit P image de Q par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
Ce n'est pas toujours possible**.** C'est possible si la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est inférieure ou égale au diamètre du cercle (C).

Exercice 3



On donne deux droites (Δ) et (Δ’) et un point A. Construire un carré ABCD tel que B $\in$(Δ) et D $\in$(Δ’).

Solution



On trace la parallè … elle coupe la droite (Δ) au point B. A partir de … côté [BE] est sur la droite (AB) et le point E appartient au demi-plan de frontière (Δ) ne contenant pas le point A.
Soit h l’homothétie de centre B qui transforme E en A.
h (G) = C et h(F) = D

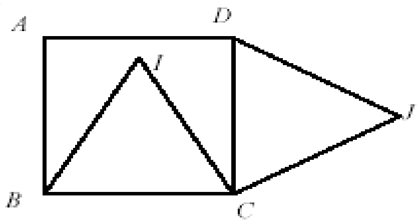
b) Stratégies pour construire

- Faire une construction modèle sans tenir compte des contraintes ;
- analyser la figure ainsi faite pour identifier des propriétés caractéristiques et des configurations usuelles liées aux transformations ;
- identifier une transformation ;
- utiliser cette transformation pour construire.

2. Utilisation des transformations pour démontrer

a) Tâche

Exercice 1

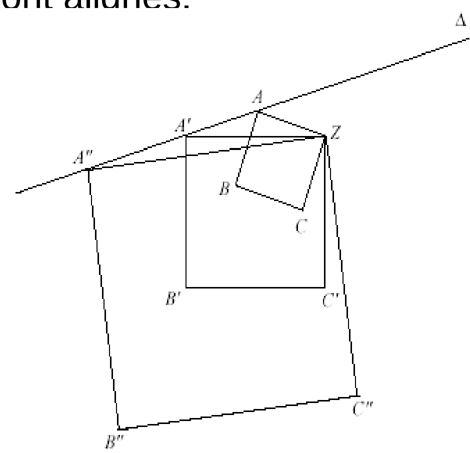


Dans la figure ci-dessous ABCD est un carré de sens direct et les triangles DCJ et BCI sont équilatéraux de sens direct.
Il s'agit de montrer à l'aide d'une transformation, que les points A, I et J sont alignés et que DB = IJ.

Solution

ABCD est un carré donc (BD) est la médiatrice du segment [AC].
Soit le point K tel que AKC soit un triangle équilatéral de sens direct. Donc K appartient à la médiatrice de [AC]. Or (BD) est la médiatrice du segment [AC], donc K $\in$ (BD) d'où K; B et D sont alignés.
Soit r(C; 60), la rotation de centre C et d'angle 60°. On a: r(C; 60) (K) = A; r(C; 60) (B) = I;
r(C;60) (D) = J
r conserve l'alignement des points ; Or les points K; B et D sont alignés et ont pour images respectives A, I et J donc les points A, I et J sont alignés.

Exercice 2



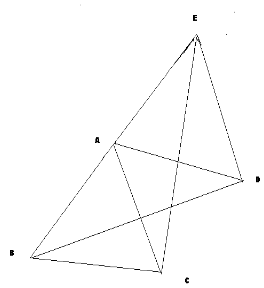
ABCZ, A'B'C'Z, A''B''C''Z sont trois carrés de sens direct.
Les points A, A' et A'' sont alignés sur une droite (Δ).
1°) Démontrer l'alignement des points C, C' et C''.
2°) Démontrer l'alignement des points B, B' et B''.

Solution

A, A'et A'' sont alignés.
1°) Soit r(Z;90°), la rotation de centre Z et d'angle 90°
r(Z;90°) (A) =C; r(Z;90°) (A') = C'; r(Z;90°) (A'') = C''
r conserve l'alignement des points d'où C; C' et C'' sont alignés.
2°) Soit r(Z;45°), la rotation de centre Z et d'angle 45°
r(Z; 45°) (A) = B; r(Z;45°) (A') = B'; r(Z;45°) (A'') = B''
r conserve l'alignement des points d'où B, B' et B'' sont alignés

Exercice 3

Les triangles ABC et ADE sont des triangles équilatéraux.



Comparer les longueurs des segments
[BD] et [CE].

Solution

Soit r(A;60°), la rotation de centre A et
d'angle 60°

r(A;60°) (B) = C; r(A;60°) (D) = E; r(A;60°) ([BD]) = [CE]

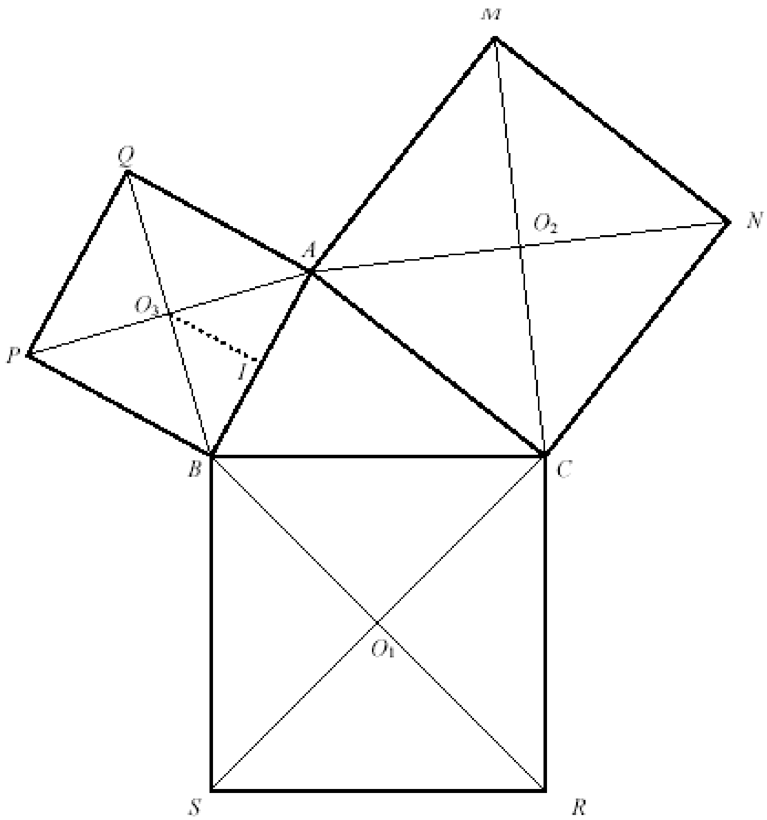
r conserve la distance d'où BD = CE

Exercice 4

ABC est un triangle de sens direct.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés BCRS, CAMN et ABPQ de centres respectifs O_1, O_2 et O_3. On note I le milieu de [AB].

1. Démontrer que les segments [BN] et [AR] sont perpendiculaires et de même longueur.
2. En déduire que les segments [IO_1] et [IO_2] sont également perpendiculaires et de même longueur.
3. Démontrer que les segments [AO_1] et [O_2O_3] sont perpendiculaires et de même longueur. [
4. En déduire que les droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourantes en l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.



Solution

1) Soit r(

r(C;90°) ... tation conserve la

distance

2) On uti ... ABN.

Dans le t ... $O_1 = \frac{1}{2}$ AR et (IO_1)

// (AR).

Dans le ... $IO_2 = \frac{1}{2}$ BN et

(IO_2) // (BN).

On a : BN = AR, $IO_1 = \frac{1}{2}$ AR et $IO_2 = \frac{1}{2}$ BN d'où $IO_1 = IO_2$

On a $(IO_1) // (AR)$, $(IO_2) // (BN)$ et $(AR) \perp (BN)$ d'où $(IO_1) \perp (IO_2)$.

3) Soit r(I;90°), la rotation de centre I et d'angle 90°.

r (I; 90°) $([AO_1]) = [O_3O_2]$ d'où $AO_1 = O_3O_2$ et $(AO_1) \perp (O_2O_3)$ car la rotation conserve la distance et l'orthogonalité.

4) $(AO_1) \perp (O_3O_2)$ donc (AO_1) est une hauteur du triangle $O_1O_2O_3$. De même on établit que (BO_2) et (CO_3) sont également des hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$. Or les hauteurs d'un triangle sont concourantes, donc les droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) concourent à l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

b) Stratégie pour démontrer

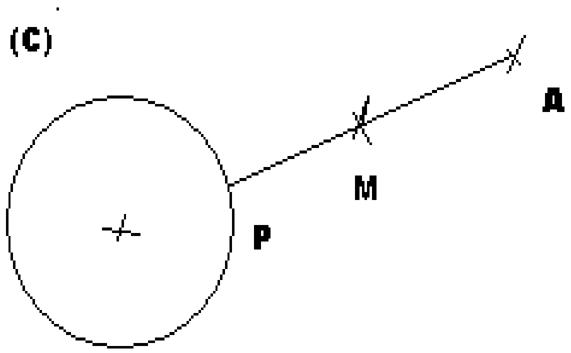
- Reconnaître des configurations liées aux transformations ;
- Identifier une transformation ;
- Utiliser ses propriétés caractéristiques pour démontrer.

3. Utilisation des transformations pour rechercher un lieu géométrique.

a) Tâche

<u>Exercice</u>

A étant un point fixe et P un point qui parcourt le cercle fixe (C).
Quel est le lieu géométrique des milieux des segments [AP] ?



<u>Solution</u>

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. h (P) = M

Si $P \in (C)$ l'ensemble des points images de P est le cercle image de (C) par h. Le lieu géométrique des milieux du segment [AP] est le cercle image de (C) par h.

b) Stratégie pour rechercher un lieu géométrique

Pour déterminer le lieu géométrique (E) d'un point variable M, on peut procéder comme suit :

1) approche expérimentale

multiplier les positions du point M (dessin à main levée, à la règle et au compas etc.…..) afin de conjecturer la nature de (E).

2) démonstration en trois étapes

1ère étape : en utilisant les propriétés liant le point variable M aux éléments fixes de la figure (que l'on peut dessiner en rouge), démontrer que M appartient à un ensemble de points fixes (G) et donc que (E) est inclus dans l'ensemble fixe (G).

2ème étape : réciproque: étudier si tout point M de (G) est un point de (E), c'est-à-dire si (G) est inclus dans (E) ; si ce n'est pas le cas, déterminer la partie de (G) incluse dans (E).

3ème étape: conclure quant à la nature exacte de (E).

Remarque:

Dans certains cas les étapes 1 et 2 se réduisent à une seule étape, le point M parcourant (G) en entier: c'est fréquemment le cas lorsqu'on utilise les transformations (exemple l'image d'une droite par une homothétie).

III Fiche pédagogique

Tâche 1

Rédiger une activité pour introduire la rotation en classe de 3ème.

Eléments de réponse : Utilisation d'un rotateur

Sur du papier A_4 est dessiné un quadrilatère quelconque ABCD.

En glissant le pointeur du rotateur sur le quadrilatère dessine le correspondant de la figure en suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Placer les points A', B', C', D' correspondants respectivement aux points A, B, C, D.

Tracer les segments [AA'], [BB'], [CC'] et [DD']. Pour chacun de ces segments tracer sa médiatrice. Que constatez vous ? Placer O le point concourant des quatre médiatrices.

Comparer OA et OA' ; OB et OB' ; OC et OC' ; OD et OD'.

Comparer les mesures des angles $\widehat{BOB'}$; $\widehat{COC'}$; $\widehat{DOD'}$; $\widehat{AOA'}$

Comparer les mesures des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{B'A'D'}$; $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$; $\widehat{ADC}$ et $\widehat{A'D'C'}$; $\widehat{BCD}$ et $\widehat{B'C'D'}$

Protocole pour construire un rotateur ou rotographe

Matériel :

- 2 barres B_1 de 22 cm ;
- 6 barres B_3 de 42 cm ;
- 1 point pouvant être fixé P ;
- 3 articulations A, A' et A'' ;

- 2 trous : l'un pour mettre une pointe C_p, l'autre pour mettre un crayon C_T.

Attention: PA' = PA'' = A'A= A''A = A'C_p = A''C_T; AC_p = AC_T.

Utilisation:

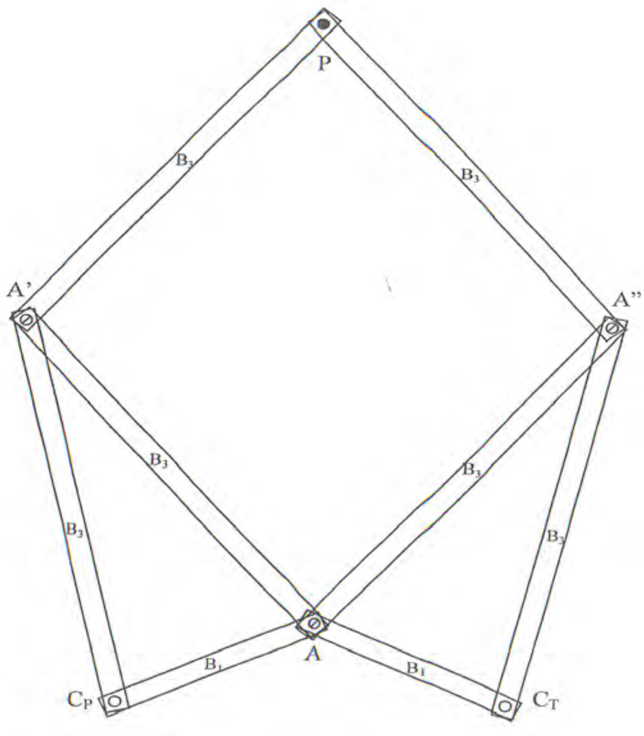
1) Fixer P sur la table.
2) Suivre la figure source avec C_p.
3) Tracer avec C_T la figure image par la rotation de centre P et d'angle $\widehat{A'C_P ; A'A}$.

Remarques : Pour changer l'angle de la rotation, il suffit de changer les longueurs des barres C_PA et C_TA.

Démonstration

$\widehat{A'PA''}$ = 180° - 2 x $\frac{1}{2}\widehat{AA'P}$ = $180 - \widehat{AA'P}$

$\widehat{C_PPC_T}$ = $\widehat{A'PA''}$ - $\widehat{C_TPA''}$ - $\widehat{A'PC_P}$ = $\widehat{A'PA''}$ - 2 $\widehat{A'PC_P}$ (car les 2 triangles A'PC_P et A''PC_T sont isométriques) = 180° -2 $\widehat{A'PC_P}$ - $\widehat{AA'P}$ (d'après l'égalité précédente $\widehat{C_PA'A}$ = $\widehat{C_PA'P}$ - $\widehat{AA'P}$ (dans le triangle isocèle A'PC_P)



Tâche 2

Elaborer un plan de leçon ASEI/PDSI d'une heure sur l'homothétie en classe de $4^{ème}$.

Fiche n°

Thème : Les transformations du plan **Sous thème**: Homothétie
Etablissement : CEG 3 **Classe :** $4^{ème}$
Effectif : 45 **Durée :** 55 mn

Justification

Les transformations planes sont utilisées dans l'artisanat, l'architecture. L'homothétie est une de ces transformations; elle permet de démontrer en autre la propriété de Thalès et d'agrandir ou réduire des dessins.

Objectifs :

A la fin de la leçon les apprenants doivent être capable de :

- définir une homothétie.
- Construire l'image d'un point par une homothétie.

Pré requis : Positions relatives de deux droites dans le plan;

Matériels didactiques : feuilles de papier, pantographes, règles d'élèves, une lampe torche, papier grand format pour servir d'écran.

Références : CIAM $3^{ème}$ pages 97-98 -99

Déroulement de la leçon.

Etapes/durée	Activités pédagogiques		Points pédagogiques	Observations/remarques
	Enseignant	Elèves		
Introduction (10mn) **Contrôle des prérequis** **Motivation** **Justification et annonce des objectifs.**	**Le professeur demande aux élèves les définitions de droites sécantes, droites parallèles.** **Il demande aux élèves de tracer deux droites sécantes puis deux droites parallèles.** **Le professeur dessine sur du papier A_4 un triangle ABC qu'il découpe. Après avoir fait de l'obscurité dans la classe, avec une lampe torche il éclaire sur le dessin et sur l'écran apparaît son projeté. Il demande aux élèves quel est le lien entre le dessin et son projeté.** **Le professeur justifie sa leçon et annonce ses objectifs**	**Les élèves répondent.** **Les élèves s'exécutent en cherchant dans leurs cahiers d'exercices** **Selon le cas les élèves observent un grandissement ou une réduction du dessin.**	**Les positions relatives des droites dans le plan.** **.**	
Développement de la leçon. (35mn) **Conclusion (5mn)** **Evaluation (5mn)**	**Le professeur met les élèves en groupe de six et distribue un pantographe par groupe plus une feuille A_4 sur laquelle se trouve un quadrilatère quelconque.** **Il leur explique l'utilisation du pantographe et les invite à construire en suivant le dessin de la feuille. Il demande de résoudre l'exercice 1 (voir fiche d'activités)** **Le professeur aide les élèves à faire une synthèse.** **Le professeur demande aux élèves en groupe de traiter l'exercice d'application.** **Le professeur donne la trace écrite.** **Le professeur propose aux élèves des exercices de maison**	**Les élèves s'exécutent** **Les élèves exécutent** **Les élèves font la synthèse.** **Les élèves s'exécutent** **Les élèves prennent la trace écrite.** **Les élèves notent les références**	**Utilisation du pantographe** **Première définition de l'homothétie.** **Evaluation formative.** **Evaluation formative**	

Fiche d'activités

Activité 1

Sur du papier A_4 est dessiné un quadrilatère quelconque ABCD.
En glissant le pointeur du pantographe sur le quadrilatère dessine le correspondant de la figure.
Placer les points A', B', C', D' correspondants respectivement aux points A, B, C, D.
Tracer les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD'). Que constatez vous ?
Tracer les droites (AB), (A'B'). Quelle est la position de ces droites? Quelle est la position les droites (AC) et (A'C') puis les droites (BC) et (B'C')?

Exercice d'application

Parmi ces figures lesquelles représentent une situation d'homothétie;
Dans le cas d'une situation d'homothétie construire l'image C' du point C.

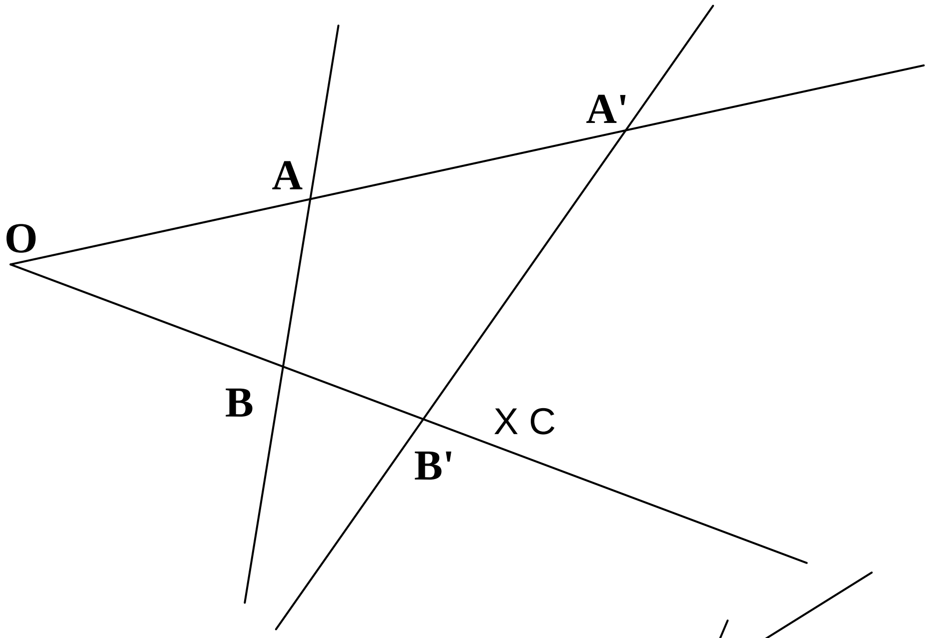


Fig: 1

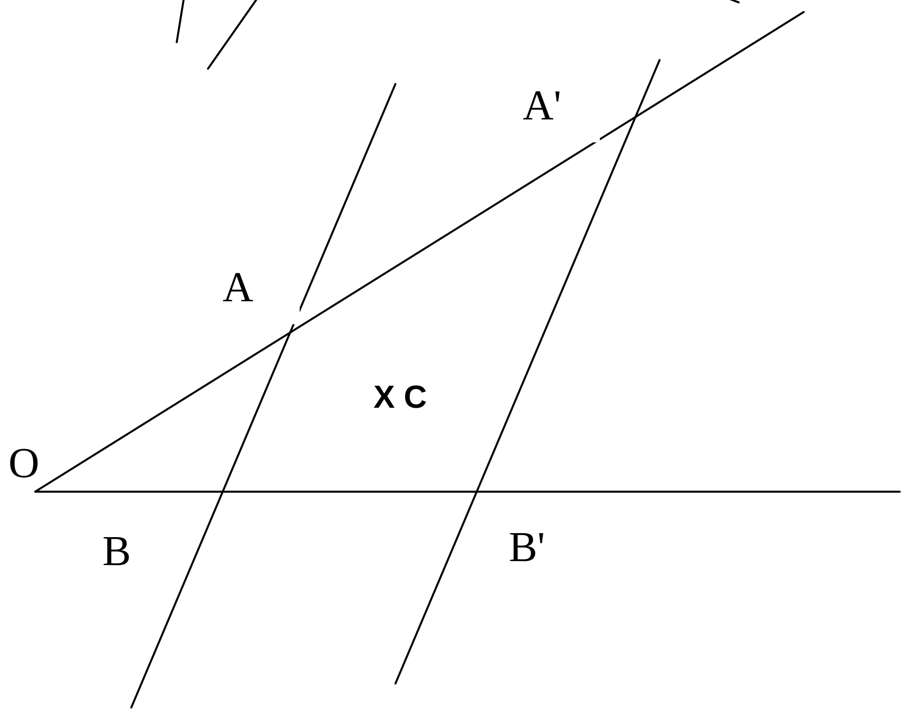


Fig: 2

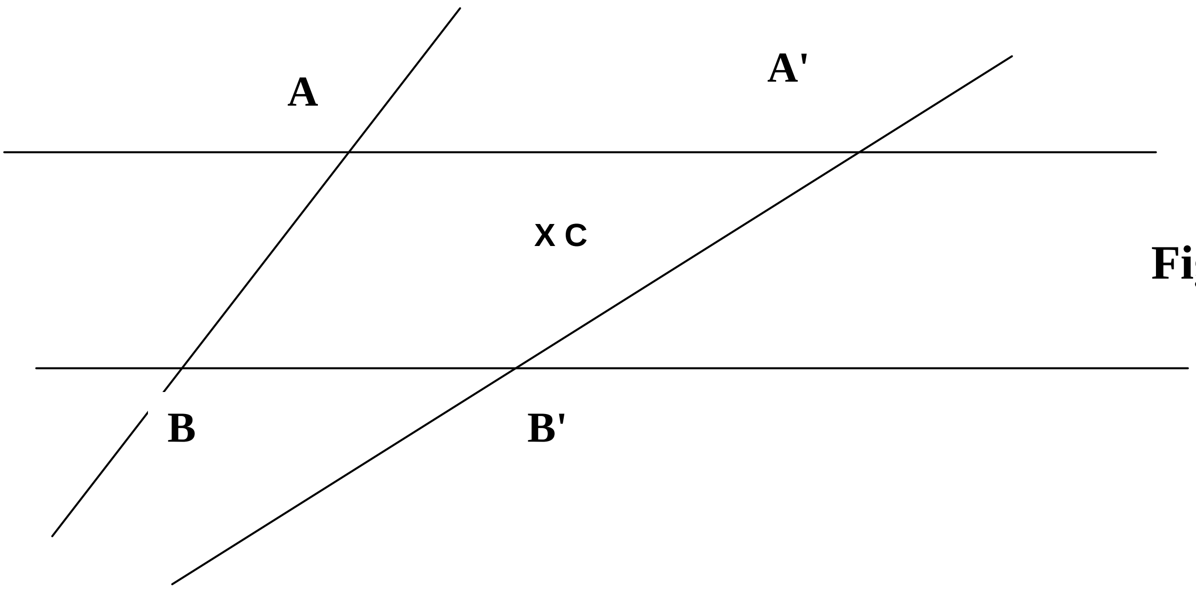
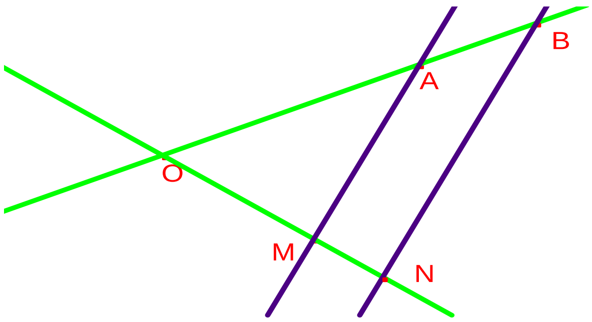


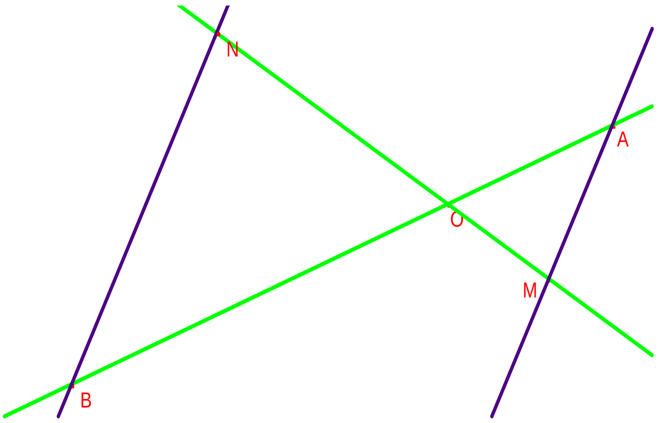
Fig: 3

<u>**Trace écrite**</u>
Homothétie

I Définition 1 : O et A sont deux points distincts, O, A et B sont trois points alignés
L'homothétie de centre O qui transforme A en B est l'application du plan qui à tout point M associe le point N tel que :

- si M=O alors N=O
- si M$\neq$O alors O, M et N sont alignés et (AM) // (BN)





Exercices de maison

Exercice 1
On considère trois points A, B et O tel que O appartient au segment [AB]. Soient h l'homothétie de centre O telle que h (A) = B. Soit M un point du plan n'appartenant pas au segment [AB], construire le point M'image de M par h.
Exercice 2
N° 54 p 100 collection triangle 4 °
Un des polygones 2 ou 3 est-il un agrandissement du polygone 1 ?
Si il y a agrandissement existe t- il une homothétie qui la matérialise?
Exercice 3
Construire le parallélogramme ABCD tel que AB = 3 cm, BC = 5 cm et
$\widehat{ABC}$ = 100°
Tracer un agrandissement du parallélogramme ABCD sachant que le côté correspondant à AB mesure alors 4,8 cm de façon que l'agrandissement se fasse par une homothétie.

Conclusion
Les transformations du plan sont utilisées dans divers domaines dont entre autres les problèmes d'optimisation, le calcul et la comparaison des grandeurs, les démonstrations, les problèmes de lieux géométriques…

Eu égard à leurs nombreuses utilisations, leur enseignement mérite une attention particulière. Les enseignants doivent s’exercer à l’étude des transformations comme objet et outil d’enseignement.

Bibliographie
Encarta 2007
PDRH/Formation continue. PRF Kaolack, janvier 95
COSTANTINI G. http/bacamaths.net