TROISIEME CYCLE DE FORMATION DES FORMATEURS REGIONAUX

RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX DANS L'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES SELON L'APPROCHE ASEI/PDSI

LIEU : CENTRE NATIONAL DE MAINTENANCE (CNM) / NIAMEY

DATES :

DU 05 AU 14 Janvier 2009
DU 16 AU 25 Février 2009

THEME : ANGLES ET TRIGONOMETRIE

COMPILE PAR LES FORMATEURS NATIONAUX DE MATHEMATIQUES

Niamey, décembre 2008

THEME : Angles et trigonométrie

Justification

Née en Egypte et en Mésopotamie, depuis plus de deux mille ans avant notre ère, la trigonométrie est utilisée dans l'astronomie (détermination de la position des astres), l'architecture (constructions, objets d'art…), la topographie (constructions de cartes, lotissements, ponts et chaussées…), la navigation (orientation), l'industrie (lunettes, verrerie…), les sciences physiques (optique géométrique, mouvements vibratoires, …), les mathématiques (outil et objet d'enseignement).

But

Améliorer l'enseignement/apprentissage des angles et de la trigonométrie.

Objectifs

✓ Définir un angle.

✓ Comparer des angles en utilisant :
- les notions de mesure d'angles ;
- les définitions et propriétés des lignes trigonométriques ;
- les constructions.

✓ Résoudre des problèmes concrets faisant intervenir les savoirs et savoir-faire sur les angles et la trigonométrie.

✓ Elaborer un plan de leçon ASEI/PDSI de 55mn sur les angles et la trigonométrie.

Plan de présentation du thème

Introduction

I. Angles géométriques et trigonométrie
II. Angles orientés

Conclusion

Introduction

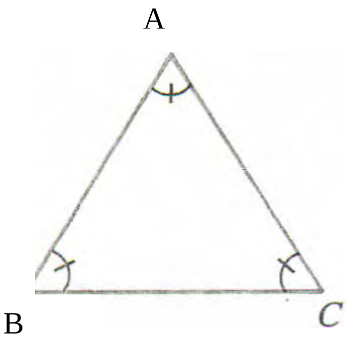
Pendant longtemps, il a été difficile de mesurer avec précision de grandes distances, en particulier les distances entre deux points inaccessibles comme la distance d'un bateau à la côte. En revanche, on a su très tôt mesurer des angles avec précision. La trigonométrie a permis de faire le lien entre les mesures d'un angle et les longueurs de ses côtés.
Les angles et la trigonométrie sont très utiles dans la vie courante et dans l'enseignement de plusieurs disciplines au secondaire. Cependant, l'enseignement de ce thème au Niger rencontre beaucoup de difficultés entre autres la conception de la notion d'angle suivant les niveaux et la résolution des problèmes liés à la trigonométrie.

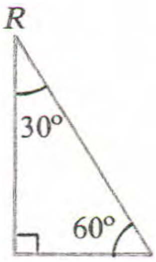
I. Angles géométriques et trigonométrie

Tâche 1

1. Proposer une définition de la notion d'angle enseignée au primaire ou au collège.

2. On donne les figures suivantes :





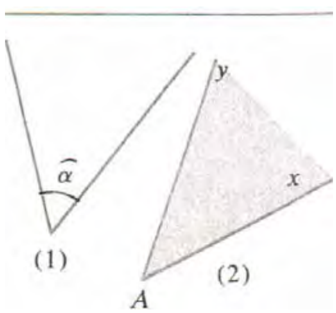


Fig1 : triangle Équilatéral — Fig2 : Dessin<<codé>> — Fig. 3 : Secteurs angulaires

Observer les figures précédentes et dégager quelques ambiguïtés des notations d'angle.

<u>Eléments de réponses de la tâche 1</u>

1. Définition d'un angle :
- Angle : coin
- Configuration d'une paire de demi -droites de même origine
- Mesure du secteur angulaire,

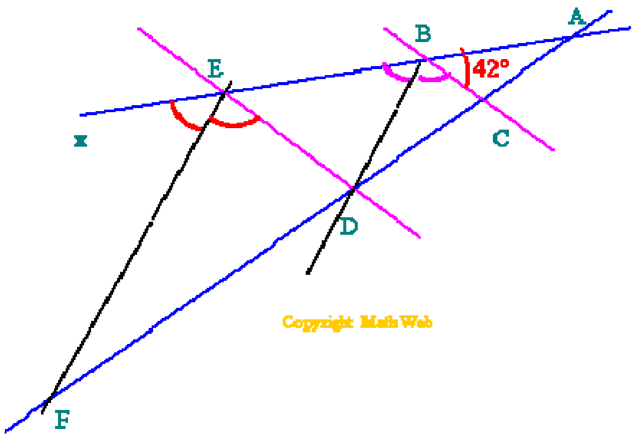
2. Ambiguïtés des notations et de désignation.

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
Ambiguïtés			

Tâche 2

Exercice 1

On donne la figure suivante. Les droites (BC) et (ED) sont parallèles. (EF) est la bissectrice de l'angle $x\hat{E}D$.



1°) Calculer l'angle $x\hat{B}C$.

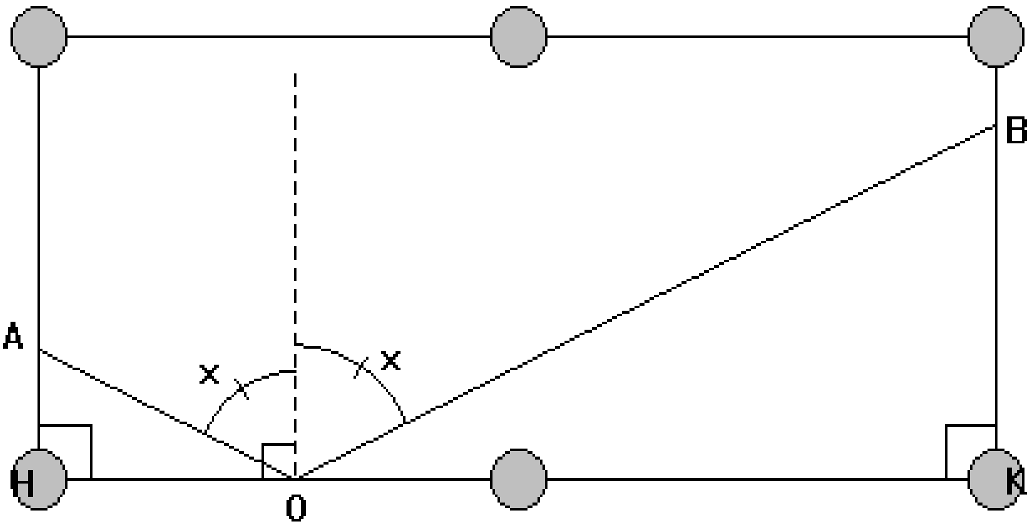
2°) Démontrer que les angles $A\hat{B}C$ et $A\hat{E}D$ sont égaux.

3°) Calculer l'angle $x\hat{E}F$

Exercice 2

Barmou est un grand amateur de jeu de « boules ». La boule située en A doit aller frapper la boule placée en B mais auparavant, elle doit passer par le point O. (voir figure)

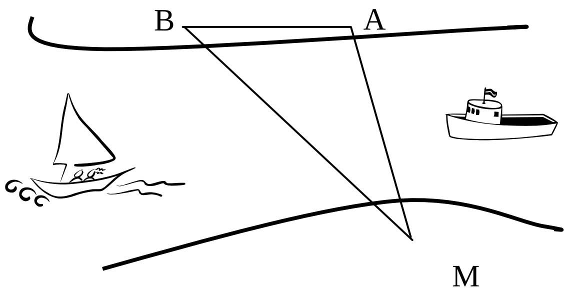
On pose x = $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ et on donne AH =0,5 m ; BK=1m.



a. Exprimer OH et OK en fonction de tanx.
b. En déduire la valeur arrondie de x à 1° près.

Exercice 3

Deux points A et M sont situés de part et d'autre du fleuve Niger. Un géomètre souhaite connaître la distance séparant ces deux points.



Placé en A, il mesure l'angle $\widehat{BAM}$ et trouve 100°. Placé en B, il mesure l'angle $\widehat{ABM}$ et trouve 60°. La distance de A à B est 6,3 km. On appelle H le pied de la hauteur issue de A du triangle ABM.
1. Calculer AH : donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au mètre près.
2. Calculer l'angle $\widehat{HAM}$.
3. Calculer AM à 0,1km près.

Eléments de réponses de la tâche 2

Exercice 1

1. $\widehat{xBC}$ = 180° - 42° = 138°

2. (BC)//(ED) $\Rightarrow$ les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AED}$ sont des angles correspondants égaux.

3. $\widehat{xED}$ = 2 $\widehat{xEF}$ $\Rightarrow$ $\widehat{xEF}$ = 69°

Exercice 2

a. $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ = $\frac{AH}{OH}$ $\Rightarrow$ OH = $\frac{AH}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)}$ $\Rightarrow$ OH= AH.tanx

D'où OH= $\frac{\tan x}{2}$

De même $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ = $\frac{BK}{OK}$ $\Rightarrow$ OK = $\frac{BK}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)}$ $\Rightarrow$ OK= BK.tanx.

D'où OK = tanx

b. tanx = 1 $\Rightarrow$ x = 45°

Exercice 3

1. sin $\widehat{ABM}$ = $\frac{AH}{AB}$ $\Rightarrow$ AH= AB.sin $\widehat{ABM}$ $\Rightarrow$ AH = 6,3.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (valeur exacte)

AH = 5,45 (valeur arrondie)

2. cos $\widehat{HAB}$ = $\frac{AH}{AB}$ $\Rightarrow$ cos $\widehat{HAB}$ =5,45/6,3= 0,86 $\Rightarrow$ $\widehat{HAB}$ =60°

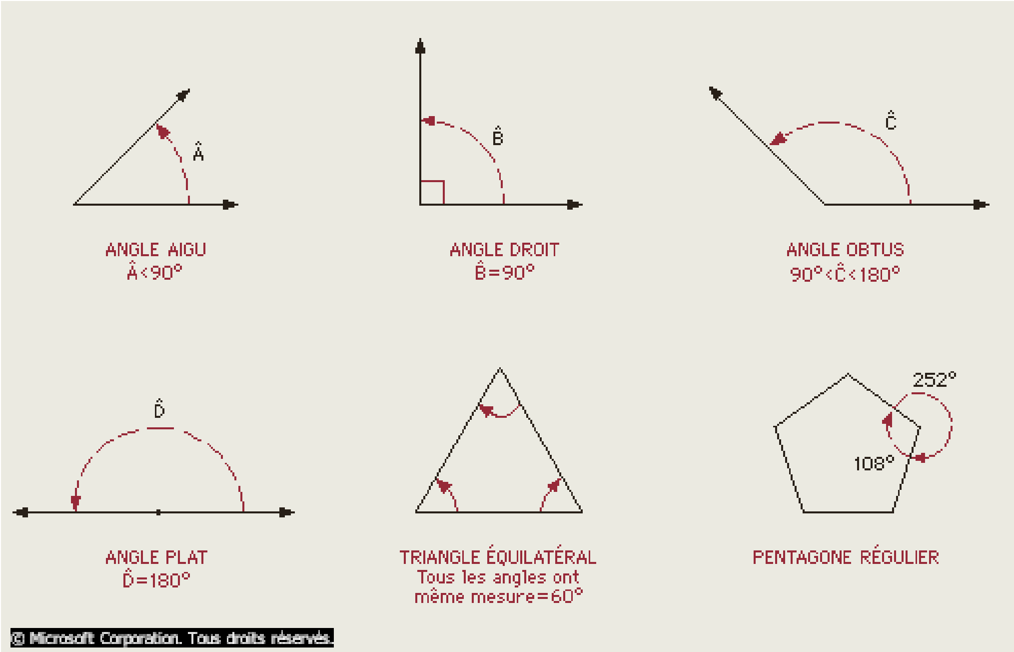
$\widehat{HAM}$ = $\widehat{BAM}$ - $\widehat{HAB}$ $\Rightarrow$ $\widehat{HAM}$ =100°-60° $\Rightarrow$ $\widehat{HAM}$ = 40°

3. cos $\widehat{HAM}$ = $\frac{AH}{AM}$ $\Rightarrow$ AM= $\frac{AH}{\cos 40°}$ = 5.45/0.76= 7,17

AM = 7.2 km.

A. ANGLE GEOMETRIQUES

1. Présentation



2. Définition

Deux demi-droites de même origine déterminent un angle. Dans notre programme du collège l'angle géométrique est défini comme étant la mesure d'un secteur angulaire.

La mesure d'un angle s'exprime en degrés (symbole °), en radians (symbole rad) ou en grades (symbole gr). La mesure en degrés est très utilisée dans l'industrie et en astronomie, tandis que celle en radians est préférée en mathématiques car elle simplifie les calculs (notamment l'expression des dérivées des fonctions trigonométriques). Le grade n'est plus guère employé, excepté en topographie et en géodésie.

3 . Conversions

Pour un angle donné, soit a sa mesure en degrés, b sa mesure en radians et c sa mesure en grades. On a alors : $\frac{a}{180}=\frac{b}{\pi}=\frac{c}{200}$

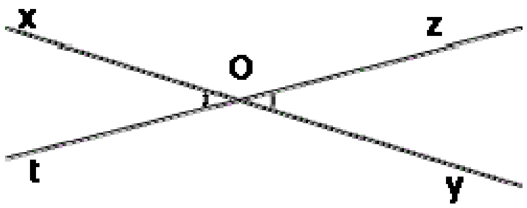
4. <u>Vocabulaire</u>

<u>4.1. Angles adjacents - Angles opposés par le somme</u>

<u>Définition 1</u>

Deux angles sont opposés par le sommet s'ils ont le même sommet et des côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

Exemple :



Les deux droites (xy) et (zt) sont sécantes en O.
Elles définissent 4 angles : $\widehat{xOt}$, $\widehat{tOy}$, $\widehat{yOz}$ et $\widehat{zOx}$.
Les angles $\widehat{zOx}$ et $\widehat{tOy}$ sont opposés par le sommet, ainsi que les angles $\widehat{xOt}$ et $\widehat{yOz}$.

Propriété

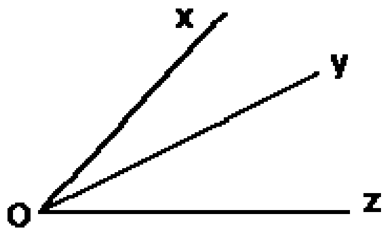
Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils sont égaux.

Exemple : Dans l'exemple précédent : $\widehat{zOx} = \widehat{tOy}$ et $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$.

Définition 2

Deux angles sont adjacents s'ils ont le même sommet et un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

Exemple :



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles adjacents.

Attention : les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{xOy}$ ne sont pas adjacents car ils ne sont pas situés de part et d'autre du côté commun [Ox).

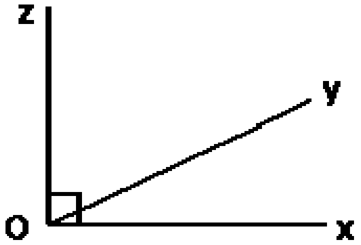
Remarque *:* Si $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles adjacents alors l'angle $\widehat{xOz}$ mesure la somme des mesure des deux autres : $\widehat{xOz} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$.

4.2. Angles complémentaires - Angles supplémentaires

Définition 1

Deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

Exemple

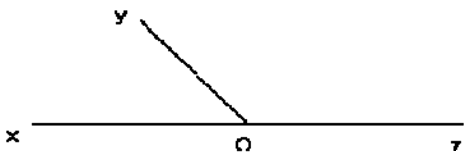


Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents et complémentaires car $\widehat{xOy}$ + $\widehat{yOz}$ = 90°.

Définition 2

Deux angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

Exemple :



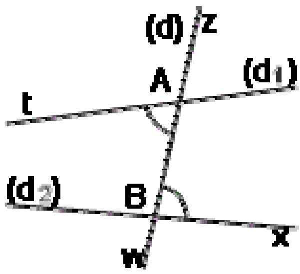
Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents et supplémentaires car $\widehat{xOy}$ + $\widehat{yOz}$ = 180°.

4.3. Angles alternes internes, angles correspondants.

On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une troisième (la sécante) (d).

Définition 1: Les angles situés entre (d_1) et (d_2), de part et d'autre de (d) et non adjacents, sont alternes internes.

Exemple

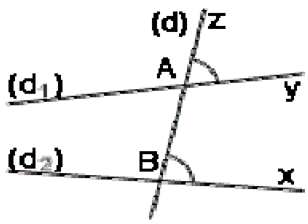


Les angles $\widehat{tAw}$ et $\widehat{xBz}$ sur la figure ci-contre sont alternes internes.

Définition 2

Les angles situés d'un même côté de (d), l'un à côté de (d_1) et l'autre du même côté de (d_2) sont correspondants.

Exemple :



Les angles $\widehat{yAz}$ et $\widehat{xBz}$ sur la figure ci-contre sont correspondants.

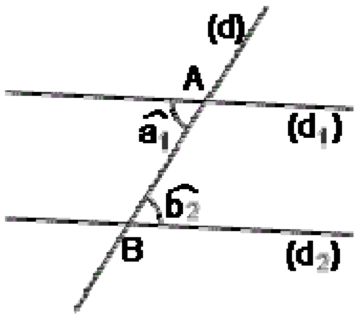
5. Angles et parallélisme

5.1 Propriétés

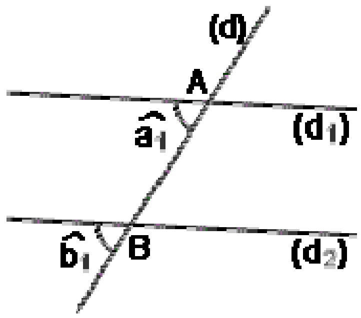
- ✓ Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors deux angles alternes internes sont de même mesure.
- ✓ Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors deux angles correspondants sont de même mesure.

Exemple

On considère deux droites (d_1) et (d_2) parallèles coupées par une sécante (d).



Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
Les angles $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_2$ sont alternes internes.
Donc $\hat{a}_1 = \hat{b}_2$.

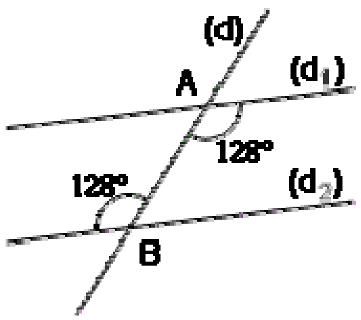


Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
Les angles $\hat{a}_1$ et $\hat{b}_1$ sont correspondants.
Donc $\hat{a}_1 = \hat{b}_1$.

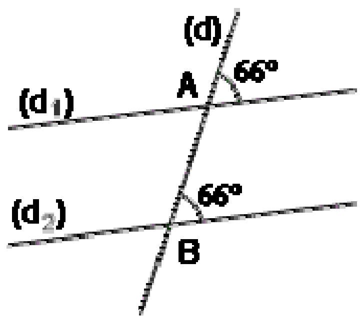
5.2. <u>Propriétés réciproques</u>

- ✓ Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.
- ✓ Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

<u>Exemple</u> : On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une sécante (d).



Les angles indiqués sur la figure sont alternes internes et de même mesure (128°).
Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.



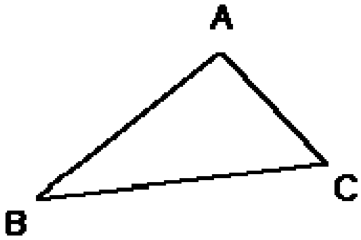
Les angles indiqués sur la figure sont correspondants et de même mesure (66°).
Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

6. <u>Somme des angles dans un triangle</u>

6.1. Propriété

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple :



Sur la figure ci-contre :

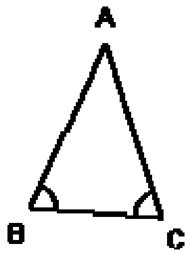
$\widehat{BAC}$ **+** $\widehat{ABC}$ **+** $\widehat{ACB}$ **=** 180°

ou plus simplement **:** $\hat{A}$ **+** $\hat{B}$ **+** $\hat{C}$ = 180°
Soit $\hat{A}$ = 100° et $\hat{B}$ = 30°.
Comme $\hat{A}$ **+** $\hat{B}$ **+** $\hat{C}$ **=** 180°, alors 100 + 30 **+** $\hat{C}$ **=** 180
Soit 130 **+** $\hat{C}$ **=** 180.
Donc $\hat{C}$ **=** 180 **-** 130 = 50°.

6.2. Cas particuliers

- Dans un triangle isocèle, les deux angles de base sont de même mesure.

Exemple :



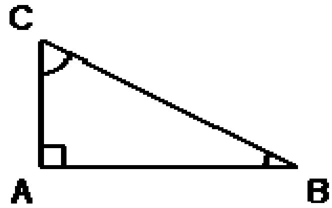
Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.
Donc $\widehat{ABC}$ = $\widehat{ACB}$ (ou $\hat{B}$ = $\hat{C}$).
Si $\hat{A}$ **=** 40°, on a alors $\hat{A}$ **+** $\hat{B}$ **+** $\hat{C}$ **=** 40° **+ 2** $\hat{B}$ **=** 180°
Donc 2 B = 140° soit B = 140/2 = 70°.

- Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent 60°.

Exemple :
les trois angles du triangle équilatéral sont de même mesure.
Donc si ABC est équilatéral, alors $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$**. Donc** $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$**= 3** $\hat{A}$**=180°. Donc** $\hat{A}$**= 60°.**

- Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en A.
Les angles $\hat{C}$ et $\hat{B}$ sont donc complémentaires**.**
Donc $\hat{B}$**+** $\hat{C}$**=** 90°.
En effet**,** $\hat{A}$**+** $\hat{B}$**+** $\hat{C}$**=** 180° et $\hat{A}$**=** 90°**.**

B. Trigonométrie

1. Définition

La trigonométrie est l'étude de la mesure des angles. Cependant, ce n'est pas la mesure élémentaire en géométrie plane ; dans ce cas, on lit les angles sur un rapporteur. En trigonométrie, on calcule les angles avec des fonctions particulières appelées fonctions trigonométriques.

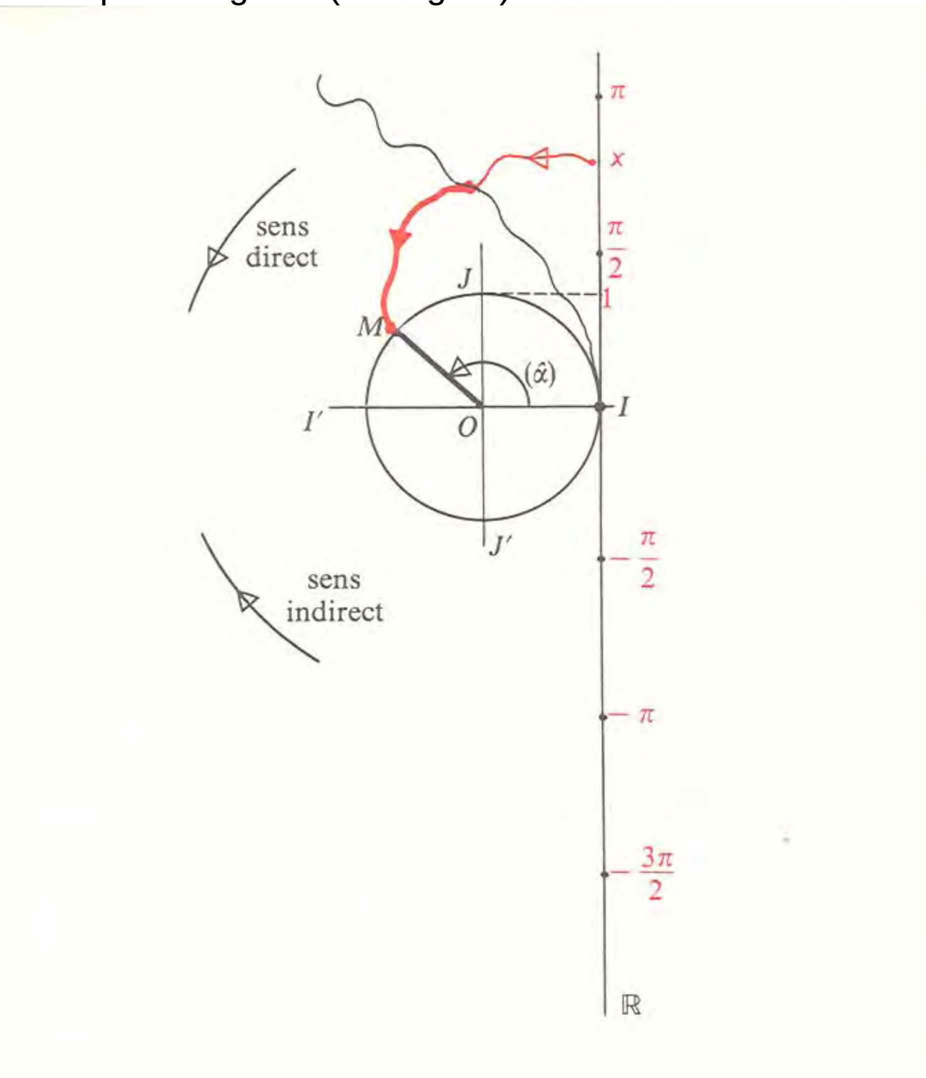
2. Fonctions trigonométriques

La définition des fonctions trigonométriques sinus, cosinus, tangente et cotangente pour des angles géométriques est basée sur la considération d'un système de coordonnées cartésiennes dans le plan muni d'un repère orthonormé. A partir du cercle unité on obtient les formules de base suivantes : Pour tout réel x on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. De ces formules découlent d'autres : formules d'addition, fonctions des multiples d'angles, puissances des fonctions trigonométriques, somme, différence et produit des fonctions trigonométriques.

II. Angles orientés

Tâche 3

Soit O un point fixé, C le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct, muni d'un point origine I.(voir figure).



En enroulant un fil matérialisant la droite graduée Δ sur le cercle C comme le suggère la figure, on fait correspondre à tout nombre réel θ un point M du cercle C. θ représente une mesure en radian de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$ et IθI représente la mesure de l'angle géométrique définies par les demi droites [0I) et [0M).

Compléter :

1. Au réel 0 correspond le point ……..

2. Au réel $\frac{\pi}{2}$ correspond le point ……..
3. Les réels π et - π correspondent au point…..

4. Pour un point donné du cercle C, trouver l'ensemble des réels qui correspondent à ce point. En déduire la mesure (l'ensemble des mesures) de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM}$.

5. Soit E l'ensemble des couples de demi droites de même origine. On définit dans E la relation $\Re$ suivante :

$(Ox,Oy)\,\Re\,(Sx',Sy')$ ssi $(\widehat{x'Sy'})$ est isométrique à $\widehat{xOy}$ et (S,x',y') **est de même sens que (O,x,y).**

a. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
b. Déterminer une propriété commune de deux éléments d'une même classe d'équivalence.
c. Pour une classe donnée, peut-on lui associer un arc orienté ?

Définition

Irma 1ERE C

PLAN DE LECON ASEI/PDSI

Thème : Configuration du plan

Sous thème : Trigonométrie

Leçon : Sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Classe : 3°

Effectif : 40

Durée : 55mn

Justification

La trigonométrie occupe une place importante dans la vie courante. En particulier le sinus et le cosinus d'un angle aigu interviennent dans des domaines aussi variés que la navigation, l'architecture, la topographie, l'hydraulique, la physique, etc.

Objectifs d'apprentissage

- Calculer le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Utiliser le sinus d'un angle pour déterminer les distances.

Pré requis

- La définition du sinus d'un angle à partir du cercle trigonométrique.
- la configuration de Thalès.

Matériels didactiques

- Ensembles géométriques.
- Papiers.

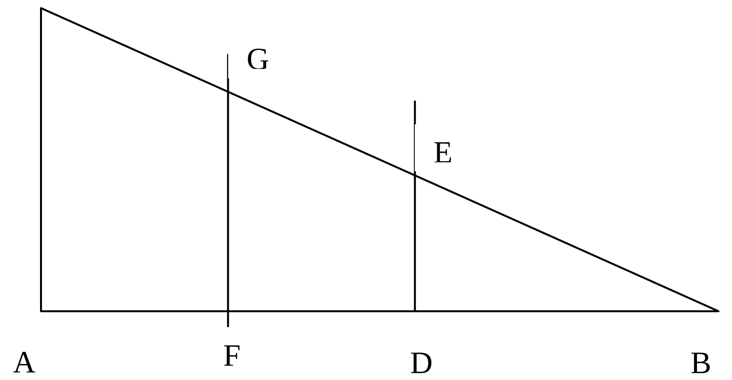
Référence:

- Collection Diabolo 3°
- Collection Hachette3°

Etapes/durée	Activités pédagogiques	Points pédagogiques	Observations/ remarques

	Enseignant	Elèves		
Introduction (10mn) Contrôle des pré requis. Motivation	Définition du sinus à travers le cercle trigonométrique professeur donne une configuration de thales et Utilisation du sinus	Les élèves répondent aux questions posées dans la fiche d'activités. Les élèves exécutent.	Application de l'axiome de Thalès Reconnaissance de certaines caractéristiques d'un triangle rectangle.	.
Développement de la leçon. (35mn) Restitution Synthèse Evaluation formative **Conclusion (5mn)** Evaluation (5mn) Terminale	Le professeur met les élèves en groupe de six et distribue les feuilles d'activités et leur donnent les consignes nécessaires. Le professeur invite les différents groupes à restituer leurs travaux. Le professeur facilite la synthèse de l'activité et aide les élèves à énoncer la formule du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Le professeur donne des exercices où les côtés des triangles rectangles sont connus et leur demande de calculer le sinus des angles aigus. Le professeur donne la trace écrite de la leçon. Le professeur donne aux élèves des exercices de maison	Les élèves exécutent en répondant aux questions posées dans les fiches d'activités. Les élèves restituent leurs travaux. Les élèves discutent pour harmoniser la synthèse. Les élèves exécutent Les élèves prennent note dans leur cahier. Les élèves prennent les références.	Conservation des rapports des distances Formule du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle. . . Application de la formule du sinus d'un angle. Utilisation du sinus d'un angle pour déterminer des distances	

Fiche d'activités



C

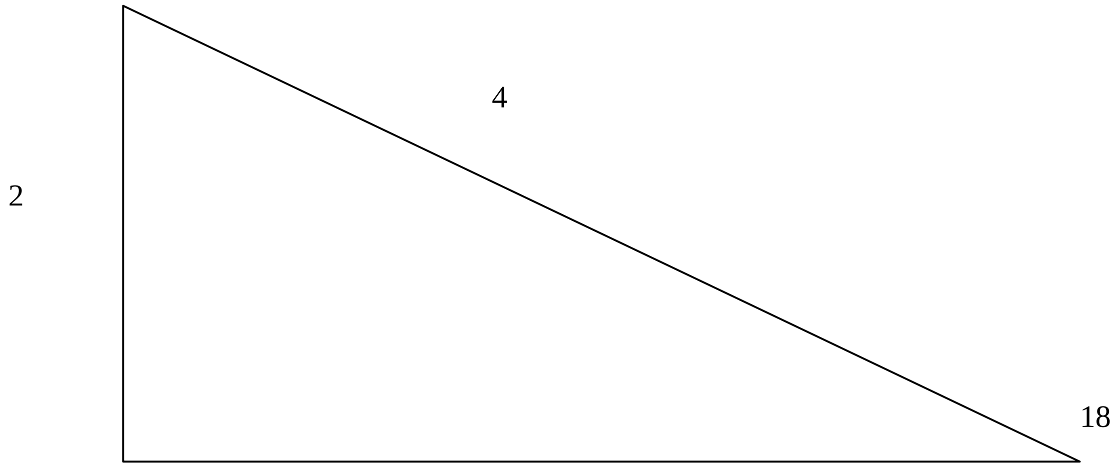
CHANGER DE TRIANGLE

ABC est un triangle rectangle en A avec BC = 3
Tracer le cercle de centre B et de rayon 1.
Soit I le point d'intersection du cercle et de (BC) et J le projeté orthogonal de I sur (AB)
Donner une expression du sinus de l'angle
Donner une expression du rapport

.

Exercice d'application :

On donne la figure suivante :



α

Calculer le sinus de l'angleα.

Trace écrite

Sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Dans un triangle rectangle le sinus d'un angle aigu est égal au rapport de la mesure du côté opposé à l'angle sur la mesure de l'hypoténuse.

(figure)

Exercice d'approfondissement

CONCLUSION

Angles et trigonométrique se retrouvent dans beaucoup d'aspect de la vie de tous les jours : détermination des hauteurs (angle entre les rayons du soleil et l'horizontale) à partir de la longueur de l'ombre projetée par une baguette verticale sur un plan horizontal, trajet d'un avion avec un vent de côté, hauteur et distance d'un éclair, etc. et dans l'enseignement de certaines disciplines. Cependant des difficultés sont rencontrées dans son enseignement (transposition didactique de la notion d'angle).Une attention particulière doit être accordée au thème.