FORMATION DES FORMATEURS REGIONAUX

RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX DANS L'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES SELON L'APPROCHE ASEI/PDSI

<u>LIEU</u> :

CENTRE NATIONALE DE MAINTENANCE (CNM) / NIAMEY

<u>DATE :</u>

DU 05 AU 17 MARS 2007

<u>THEME</u> : Histoire et logique des mathématiques

<u>Compilé par</u>

<u>LES FORMATEURS</u> :

DE

MATHEMATIQUES

<u>Thème de la séance</u> : Histoire et logique des mathématiques

But de la séance :

Aider les enseignants à comprendre l'histoire des mathématiques et sa logique.

Justification

Les mathématiques sont applicables dans tous les aspects de la vie : en économie (avec le calcul d'intérêt, l'élaboration de budget, etc.), en physique (avec les équations différentielles, trigonométrie, etc.). Considérées comme abstraites dans l'ensemble, les élèves et même certains enseignants connaissent des difficultés liées à la conceptualisation, à la visualisation des rapports et surtout à l'établissement des liens avec la réalité. Leur enseignement n'est pas aisé et un détour par l'histoire des mathématiques permettra aux enseignants de mieux aborder certaines notions

Objectifs

A la fin de cette séance les participants doivent être capable de :

- s'approprier de quelques éléments de l'histoire des mathématiques afin de comprendre sa logique.
- utiliser l'histoire des mathématiques dans la motivation des leçons.
- reconnaître les domaines d'application des mathématiques.

Introduction

A travers la transposition didactique,l'enseignement des mathématiques coupe souvent les notions, des problèmes concrets qui leur ont donné naissance et qui leur donnent un sens.Bon nombre d'enseignants de mathématiques du secondaire ont une faible connaissance de l'histoire de leur discipline et son apport. Il est impossible de connaître une discipline sans en connaître son histoire, l'histoire de ses tâtonnements et de ses erreurs.Etudier l'histoire des mathématiques, c'est déjà poser la question de leur nature et il faut en tenir compte pour pouvoir mieux les enseigner Il est donc légitime de se poser ces questions :

-Comment les mathématiques sont-elles nées ?
-Pourquoi en a t'on eu besoin ?
-Comment les mathématiques ont-elles évolué ?
-Quelle logique utilisent les mathématiques ?

C'est à ces questions que nous allons essayer d'apporter des éclaircissements.

I. De l'origine et de la nécessité des mathématiques

Les mathématiques ont été élaborées et utilisées pour résoudre des problèmes liés aux exigences de la vie pratique : les nombres pour garder la mémoire des quantités, les calculs pour gérer des problèmes économiques, des éléments de géométrie pour la fabrication des objets ou la construction d'édifices. Les mathématiques sont donc nées des besoins pratiques de l'homme. Tout en gardant un lien avec le réel, car bon nombre de concepts ou de problèmes mathématiques sont nés des sciences expérimentales : (par exemple théorie du potentiel et équations aux dérivées partielles), les mathématiques ont aussi créé leurs propres objets, concepts et théories ce qui explique leur rôle d'outil et qui leur confère le caractère de polyvalence.Les mathématiques furent essentiellement créées parce que l'on en avait besoin, et elles ont été bien souvent un outil. Aujourd'hui on est encore obligé de créer de nouveaux concepts mathématiques pour répondre à la demande de la haute technologie. Les mathématiques ont donc été un outil pour les autres sciences. Quand elles ne répondirent pas à un réel besoin, elles finirent toujours par permettre de résoudre de nouveaux problèmes qui se posèrent bien plus tard : par exemple la théorie de la relativité créée par Einstein au 20^{ième} siècle qui a utilisé la géométrie non euclidienne développée par l'allemand Riemann.

I. De l'évolution des mathématiques.

L'histoire des mathématiques retrace l'évolution des idées et des concepts mathématiques à partir de la préhistoire. En effet, les mathématiques ont pratiquement le même âge que l'humanité elle-même : des preuves du sens géométrique et de l'intérêt pour des formes et des motifs géométriques ont été découvertes sur des poteries préhistoriques et sur les peintures des cavernes. Les systèmes de calcul sont, à cette époque, très probablement fondés sur l'utilisation des doigts de l'une ou des deux mains, comme en témoigne la prédominance des bases 5 et 10 dans la plupart des systèmes de numération actuels.Par exemple au NIGER les Haoussa, les Djerma-sonrai, les Touareg, les Toubous, les Kanouri utilisent la base 10 dans leur système de numération ; par contre les Peuls utilisent la base 5. L'évolution des mathématiques peut être résumée en six grandes étapes :

Etape1 *:* **Mathématiques de la préhistoire avec les premiers concepts des nombres**
L'humanité a mis des millénaires pour passer de la quantité aux nombres : l'idée de nombre est l'aboutissement d'un long travail d'abstraction de la pensée.Les marques numériques les plus anciennes datent des premières civilisations du paléolithique (30.000 ans environ avant J.C). Les hommes avaient à leur disposition deux supports privilégiés : les os et le bois.Les premiers chiffres sont apparus à Sumer et en Elam vers - 3 300.Nos ancêtres ont créé les nombres pour résoudre deux types de problèmes : compter et ordonner. Les nombres cardinaux (1, 2,3, etc.) qui permettent de compter et les nombres ordinaux (1er, 2ème ,3ème, etc.) qui permettent d'ordonner.

Etape2 : **Mathématiques de l'antiquité (environ -3 000 à -500)**
L'écriture cunéiforme des babyloniens, frappée dans l'argile, utilisait un système de numération de base 60(système sexagésimal) qui est encore utilisé pour mesurer le temps et les angles.Les valeurs irrationnelles sont découvertes vers -600 par **Pythagore.**
On assistait aux fondements du calcul et on commençait à raisonner véritablement.Les premiers documents décrivant des mathématiques évoluées et organisées remontent à l'époque de l'ancienne Babylone en Mésopotamie, et à l'egypte du III^{ième} avant J-C. Les mathématiques sont alors régies par l'arithmétique, à laquelle s'ajoute un intérêt particulier pour la mesure et le calcul en géométrie. Les concepts d'axiome ou de démonstration n'existent pas encore. Les Grecs adoptent les acquis mathématiques des Babyloniens et des Égyptiens. Un nouvel élément apparaît cependant dans leurs mathématiques : une approche abstraite, fondée sur une structure logique de définitions, d'axiomes et de démonstrations. D'après les documents laissés ultérieurement par les Grecs, cette mathématique commence à se développer au VIe siècle av. J.-C., avec Thalès de Milet et Pythagore de Samos, chef religieux qui met l'accent sur l'étude des nombres pour comprendre le monde. Certains de ses disciples font des découvertes importantes en théorie des nombres et en géométrie, découvertes qui seront attribuées à Pythagore lui-même.

Le V^e siècle av. J.-C. compte deux grands géomètres : le philosophe atomiste Démocrite D'Abdère, qui découvre la formule du volume d'une pyramide, et Hippocrate de Chio, qui montre que les aires des figures en forme de croissant et limitées par des arcs de cercle sont égales aux aires de certains triangles. Cette découverte est liée au célèbre problème de la quadrature d'un cercle, c'est-à-dire la construction (à la règle et au compas) d'un carré de même aire que celle d'un cercle donné. Deux autres problèmes mathématiques célèbres apparaissent au cours de ce siècle : diviser un angle en trois angles égaux et construire un cube dont le volume est le double d'un cube donné. Ces trois problèmes seront résolus à l'aide d'instruments beaucoup plus complexes qu'une règle et un compas. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on démontrera qu'il est impossible de les résoudre au moyen de ces deux instruments.

Dans la seconde moitié du Ve siècle av. J.-C., une découverte dérangeante est faite : aucune unité de longueur ne permet de mesurer en même temps le côté et la diagonale d'un carré. En d'autres termes, ces deux longueurs sont *incommensurables* : la relation numérique existant entre le côté et la diagonale ne peut s'exprimer par le rapport de deux nombres entiers *m* et *n.* Les Grecs considérant que seuls les éléments de dénombrement (1, 2, 3, etc.) sont des nombres, ils n'ont donc pas de moyen numérique pour exprimer le rapport de la diagonale sur le côté. (Ce rapport, $\sqrt{2}$, sera appelé nombre irrationnel.) Ainsi est mise en doute la théorie de Pythagore sur les rapports des nombres. Une nouvelle théorie apparaît au IVe siècle av. J.-C., introduite par Eudoxe de Cnide. On en trouve la présentation dans les *Éléments* d'Euclide. Les treize livres qui constituent les *Éléments* contiennent une grande part des connaissances mathématiques élémentaires, découvertes avant la fin du IVe siècle av. J.-C., et concernent la géométrie des polygones, le cercle, la théorie des nombres, la théorie des incommensurables, la géométrie des solides et la théorie élémentaire sur les aires et les volumes.

.Le IV^e siècle av. J.-C. est marqué par un brillant développement des mathématiques, comme en témoignent, par exemple, les travaux d'Archimède de Syracuse et d'Apollonios de Perga. Archimède utilise, par exemple, une méthode fondée sur la pesée théorique de parties de figures infiniment petites et permettant de déterminer les aires et les volumes des figures issues de sections coniques. Ces sections coniques, découvertes par Menaechmus, élève d'Eudoxe, ont fait l'objet d'un traité d'Euclide. Cependant, les écrits d'Archimède sur ces sections coniques sont les premiers connus. Archimède étudie également les centres de gravité et la stabilité de différents solides flottant sur l'eau. Une grande partie de ses travaux conduira à la découverte du calcul infinitésimal au $XVII^e$ siècle. Son contemporain Apollonios écrit un traité de huit livres sur les sections coniques. Ce traité introduit les noms de trois types de courbe : ellipse, parabole et hyperbole, et en donne une présentation géométrique qui restera en usage jusqu'au $XVII^e$ siècle.

Après Euclide, Archimède et Apollonios, la Grèce ne connaîtra pas de géomètre de stature comparable. Les écrits de Héron d'Alexandrie, au Ier siècle av. J.-C., témoignent du fait que les éléments babyloniens et égyptiens concernant les mesures et l'arithmétique survivent à côté des théories des grands géomètres. Dans la même tradition, mais pour des problèmes beaucoup plus complexes, on peut citer les livres de Diophante d'Alexandrie, du III^e siècle apr. J.-C. Ils permettent de déterminer des solutions rationnelles d'équations à plusieurs inconnues. De telles équations, appelées *équations diophantiennes*, sont le sujet de l'analyse diophantienne.

Parallèlement à ces travaux proprement mathématiques, de nombreuses études sont faites en optique, en mécanique et en astronomie. Des auteurs, tels qu'Euclide ou Archimède, écrivent des ouvrages dans certains domaines d'astronomie. Peu après Apollonios, les astronomes grecs adoptent le système babylonien de notation des fractions et établissent des tables pour les mesures des cordes d'un cercle. Pour un cercle de rayon donné, ces tables donnent la longueur des cordes sous-tendant une séquence d'arcs dont les mesures augmentent suivant un pas fixe. Ces tables sont équivalentes à la table des modernes sinus et leur invention marque les débuts de la trigonométrie. Dans les premières tables (celles d'Hipparque, vers 150 av. J.-C), la mesure des arcs est donnée par 7,5°, de 0° à 180°. À l'époque de Ptolémée, au IIe siècle apr. J.-C., la maîtrise grecque des procédures numériques a tellement progressé que ce dernier peut introduire dans son *Almageste* une table donnant les cordes d'un cercle par pas de 0,5°. Ce pas, exprimé en système sexagésimal, correspond, en fait, à une précision d'environ 10-5.

Dans le même temps, des méthodes sont développées pour résoudre des problèmes impliquant des triangles plans, et un théorème — portant le nom de l'astronome Ménélaüs d'Alexandrie — permet de déterminer les longueurs de certains arcs sur une sphère, connaissant la mesure d'autres arcs. Ces progrès permettent aux astronomes grecs de résoudre les problèmes de l'astronomie sphérique et de développer un système qui servira jusqu'à l'époque de Johannes Kepler

<u>Etape3</u> : Mathématiques du moyen age (VIè siècle au XV)
C'était la naissance des chiffres et on faisait une véritable synthèse des connaissances des peuples précédents. Les nombres négatifs sont apparus aux premiers siècles, le zéro a été inventé au 7ème siècle et le premier usage d'une suite par **Fibonaci** est intervenu au 13ème siècle. L'Histoire reconstruite par les occidentaux a trop souvent minimisé les apports de la science arabe, ne lui conférant qu'un rôle de transfert des idées grecques à l'Occident. Pourtant, l'âge d'or de la science arabe (VIIIe - XIIIe siècles) a produit de nombreux savants qui, loin d'être de simples traducteurs,
Parmi les mathématiciens citons : au IX^{e} siècle, AI Khwarismi , **Abu Kamil**; au X^{e}, **AL Battani** ; **Abu AL Wafa** au XIe, **AL Khayyam** , **AL Kharkhi**, **AL Zarqali**; , **ALBitrugi**. Il faut en outre mentionner pour l'Inde, au XII^{e} siècle, **Bhaskara** (1114-1183). Plus tard, au contraire, jouèrent un rôle très important de relais des mathématiques des arabes, appartiennent au monde chrétien : au XIII^{e} siècle, **Léonard de Pise**, **Sacrobosco**, **Jordanus de Nemore**, **Campanus de Novare, Robert Grosseteste**; au XIV^{e} siècle, **Bradwardine**, **Nicolas Oresme**.
Avec l'expansion rapide de l'islam, les musulmans prirent connaissance des sciences étrangères et utilisent ces acquis auxquels ils apportent de nouvelles contributions. Ainsi, les mathématiciens élargissent le système de numération positionnel indien, en introduisant les fractions décimales. **Omar Khayam** généralisa les méthodes indiennes d'extractions des racines carrées et cubiques, introduisit les racines quatrièmes, cinquièmes et supérieures au XII^{è} siècle.**AL-Karadji** compléta l'algèbre de **Mohammed AL-Khuwarizmi** sur les polynômes, en introduisant des polynômes avec un nombre infini de termes –le nom **d'AL-Khuwarizmi** a donné le mot algorithme, et le titre d'un ses livres était à l'origine du terme algèbre.

<u>Etape 4</u> : Mathématiques de la renaissance et de l'age classique (XV – XVI^{ième} siècle)
A cette époque les mathématiques ont connu les développements les plus importants depuis l'époque d'**Archimède** et d'**Apollonios :**

- la théorie des nombres par Gauss ;

- en géométrie projective par Descartes ;
- théorie des probabilités avec le problème de jeu et la doctrine des hasards (**Bernoulli**) ;
- calcul différentiel et intégral avec **Newton** et **Leibniz ;**
- théorie d'équations d'**Evariste Galois ;**
- création des nombres imaginaires, résolution des équations de 3ième et 4ième degrés par **Cardan**, **Tartaglia, Bombelli ;**
- introduction de la représentation de l'inconnue par **Viète ;**
- emploi des symboles littéraux, calcul algébrique par **Stevin.**

<u>Etape 5</u> : Mathématiques du XVII$^{\text{ième}}$ au XX$^{\text{ième}}$ siècle

Après les progrès estimables mais limités des mathématiques au Moyen Age et à la renaissance, c'est un grand moment de création que ces siècles nous offrent .Alors va s'affirmer un style nouveau des mathématiques, marqué essentiellement par un souci de plus grande rigueur, par un esprit de conquête qui conduira à de nombreux champs nouveaux d'investigation et par la recherche d'une généralité toujours plus grande.On note quelques réalisations :

- invention des logarithmes en 1610 par Neper ;
- maniement des intégrales en 1610 par **Grégoire de St-Vincent ;**
- création de la géométrie analytique, notion de tangente à une courbe en 1630 par **Descartes ;**
- développement en série d'une fonction utilisant ses dérivées successives en 1710 par Taylor ;
- représentation des fonctions par des séries trigonométriques en 1800 par **Fourier**
- premières définitions rigoureuses des notions de limite et de continuité par **Bolzano** en 1810 ;
- théorie des nombres complexes en 1830 par **Gauss ;**
- concept de vecteur par **Bellativis** en 1830 ;
- étude des fonctions d'une variable complexe par **Riemann** en1850 ;
- notion d'espace métrique par **Hausdorff** en 1900 ;
- théorie des ensembles par **Zermelo** en 1900.

<u>Etape 6</u> : Mathématiques actuelles

Aujourd'hui les mathématiques se mondialisent et les connaissances mathématiques progressent toujours plus vite.Meme si un grand nombre de problèmes importants ont été résolus, d'autres restent comme des défis, et de nouveaux problèmes difficiles surgissent.Des théories auparavant distinctes, ont été unifiées dans des théories à la fois plus globales et plus abstraites, et les mathématiques les plus abstraites finissent aujourd'hui par trouver des applications.Les mathématiques ont très largement contribué à l'élaboration conceptuelle de l'ordinateur qui dans sa puissance de calcul est un outil très précieux pour tester et modéliser des hypothèses ou même démontrer des conjonctures.

II. De la logique mathématique

Les collègues physiciens, biologistes, informaticiens, économistes nous le disent tous : ce qui les intéresse d'abord dans la formation mathématique, c'est la démarche. Les mathématiques ont une façon originale d'enchaîner définitions, hypothèses,

conclusions, théorèmes et démonstrations. La validité d'un énoncé, avant d'être établie par une démonstration, peut être devinée, illustrée, testée sur des exemples ; mais, en fin de compte, c'est sur une démonstration qu'elle repose. Le raisonnement mathématique ne s'y réduit certes pas : il intègre la recherche d'exemples et de contre-exemples, l'utilisation de cas particuliers, d'analogies, de généralisations, l'appel aux théories connues, la découverte, quand il se peut, du cadre naturel où se pose une question, et il offre un champ très vaste à l'imagination. Mais c'est la démonstration qui joue le rôle, en mathématiques, de l'expérience cruciale dans les disciplines expérimentales. Un objectif raisonnable de l'enseignement des mathématiques est qu'au terme des études les élèves aient une bonne idée de ce qu'est une démonstration mathématique. En mathématiques, tout nouveau résultat doit être prouvé c'est-à-dire être le résultat d'une démonstration. Par démonstration, il faut entendre la déduction d'une nouvelle affirmation à l'aide d'un raisonnement logiquement articulé à partir de résultats, de propriétés déjà établis ou supposés vrais.Dans l'enseignement, l'accès à ce mode de raisonnement est introduit en géométrie au niveau du collège.
Dans les premières années de la scolarité obligatoire, les élèves apprennent à reconnaître, à décrire, à reproduire les figures géométriques usuelles. Les éléments constitutifs d'une figure (côtés, angles, diagonales, hauteurs, etc.) sont définis par leurs propriétés (parallélisme, équidistance, etc.). Cet apprentissage fournit un ensemble de connaissances élémentaires à partir duquel d'autres connaissances vont se construire, se déduire de façon logique. Par exemple, de la définition des médiatrices d'un triangle on déduit, assez simplement, qu'elles se coupent en un seul point Comme on le sait bien, cet objectif est loin d'être atteint actuellement .De tous temps, les mathématiques se sont développées autour de la nécessité ou de la volonté d'apporter des réponses à des problèmes, que ces problèmes soient externes aux mathématiques elles –mêmes ou posés à l'intérieur même des mathématiques Ainsi poser et résoudre des problèmes constitue la plus importante tâche du mathématicien et la recherche en mathématiques se caractérise par des phrases heuristiques, où l'intuition,la maturation inconsciente,le bricolage, l'expérience, l'induction, la formulation de conjonctures soumises à la preuve, interviennent tour à tour dans un travail qui nécessite souvent la durée. La preuve fait déjà partie de cette phase où l'on cherche, puisque, très souvent, la connaissance se construit dans une dialectique où les conjonctures sont soumises à preuves réfutations, donnant lieu à des reformulations, des tentatives nouvelles.Depuis les grecs, les mathématiques sont une science démonstrative, la démonstration étant le moyen de preuve qui les caractérise par opposition aux sciences expérimentales. On passe donc de la conjoncture à la proposition.

CONCLUSION

L'histoire des mathématiques est une ressource très riche pour l'enseignant .Il peut y trouver des idées d'activités pour les élèves, des problèmes qui se rapprochent des développements de la création de nos connaissances et qui ont de ce fait un contexte culturel supplémentaire. Les cheminements historiques des mathématiques ne correspondent pas nécessairement aux difficultés et solutions que peuvent trouver les élèves. Ils peuvent cependant aider l'enseignant à trouver un meilleur cadre d'apprentissage pour ses élèves. Des connaissances en histoire des mathématiques permettent de mieux comprendre cette situation dans laquelle les connaissances mathématiques sont devenues objets d'enseignement pour elles-mêmes ; elles permettent aussi à l'enseignant de connaître le type de problème qu'une notion permet de résoudre.

Enfin l’histoire des mathématiques permet de démystifier les mathématiques auprès des élèves, en leur montrant qu’elles sont une œuvre humaine.

Références bibliographiques : ROLAND C. , Mathématiques et mathématiques scolaires.
Encarta, 2006.
Internet

TACHE

1°) Quelles utilisations pédagogiques peut on faire de l’histoire des mathématiques dans l’enseignement ?

2°) Illustrer un cas pratique d’utilisation.

Eléments de réponses.

1°) Utilisations pédagogiques

- Motivation des leçons.
- Souci d’uniformiser les données.
- Interdisciplinarité.
- Connaissance de grands penseurs.
- Gestion des erreurs
- Introduction d’une notion
- Sources d’exercices des problèmes divers
- Connaissance des grands penseurs
- Source d’information
- Activités d’approche.

2°) Cas pratique

-Théorème de Thalès pour calculer les hauteurs.

-Introduction des nombres