FICHE DE COURS:

Niveau : quatrième

Horaire : 5h

Effectif : 42

Titre de la leçon : Droites remarquables dans un triangle : bissectrices, médianes.

Objectifs : au terme de la leçon l'élève doit :

- connaître la propriété : les trois bissectrices sont concourantes ;
- connaitre le vocabulaire : cercle inscrit, centre de gravité ;
- être capable de construire le cercle inscrit à un triangle ;
- connaitre la propriété : les trois médianes d'un triangle sont concourantes ;
- être capable de montrer qu'un point est centre de gravité d'un triangle ;
- être capable de placer le centre de gravite d'un triangle connaissant une médiane ;
- être capable d'utiliser les droites remarquables pour démontrer que :
    - trois points sont alignés ;
    - trois droites sont concourantes ;
    - un point est milieu d'un segment ;
- être capable de montrer qu'un triangle est isocèle à partir des propriétés de ses droites remarquables.

Pré-requis

- Notions sur les triangles et les quadrilatères.
- Définition et propriétés d'une bissectrice et d'une médiane.
- Propriétés de la distance d'un point à une droite et de la position relative d'une droite et d'un cercle.
- Propriétés de la droite des milieux.

Sources

Collection Excellence 4^{e}, internet, programme de mathématiques du premier cycle 2006.

Plan de la leçon :

I) Bissectrices

1) Activité
2) Propriétés
3) Méthode de construction du cercle inscrit dans un triangle

II) Médianes

1) Activité
2) Propriétés
3) Méthode de construction du centre de gravité d'un triangle

III) Reconnaissance d'un triangle isocèle

1) Propriété 1
   a) Activité
   b) Enoncé
2) Propriété 2
   a) Activité
   b) Enoncé
3) Propriété 3
   a) Activité
   b) Enoncé

VI) Utilisation des droites remarquables

1) Une méthode pour démontrer qu'un point est milieu d'un segment
   a) Exemple
   b) Méthode
2) Une méthode pour démontrer que des points sont alignés
   a) Exemple
   b) Méthode
3) Une méthode pour démontrer que trois droites sont concourantes

a) Exemple
b) Méthode

Déroulement de la leçon

I) Bissectrices

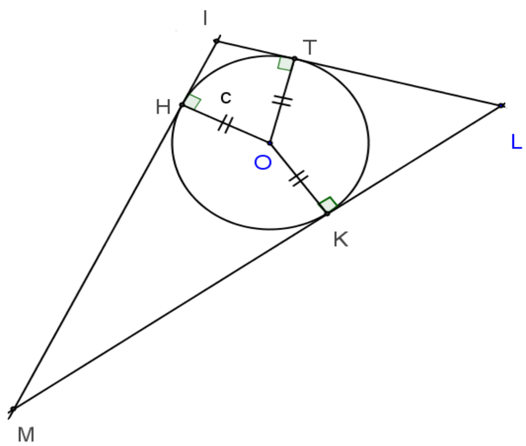
1) Activité

1) Trace un triangle ABC puis les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Elles se coupent en I.
2) Trace les droites passant par I et perpendiculaires à (AB), (AC) et (BC) respectivement en M, P et Q.
3) Montre que IP = IM = IQ ; en déduire que I est un point de la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
4) Trace le cercle de centre I et de rayon IM (on constate qu'il est intérieur au triangle). Justifie qu'il est tangent aux trois cotés du triangle ABC.

2) Propriété

Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point I qui est le centre d'un cercle tangent aux supports des trois cotés de ce triangle et situé à l'intérieur de ce triangle, appelé cercle inscrit dans ce triangle.

Configuration



3) Méthode de construction du cercle inscrit dans un triangle

Pour tracer le cercle inscrit dans un triangle :

- Je trace soigneusement deux bissectrices de ce triangle.
- Je construis le projeté orthogonal H de leur point d'intersection I sur un des cotés du triangle.
- Je trace le cercle de centre I et de rayon IH.

  Exercice d'application

  IJK un triangle tel que IJ = 9 cm, JK = 7 cm et IK = 7 cm.
  Construis le cercle inscrit dans ce triangle.

II) Médianes

1) Activité
   1) Construis les médianes [AA'] et [CC'] d'un triangle ABC. Soit G leur point d'intersection.
   2) a) Construis le point D, symétrique du point B par rapport au point G.
      b) En utilisant le triangle ABD, montrer que les droites (GC') et (AD) sont parallèles ; déduis- en que (GC) // (AD).
      c) En utilisant le triangle BDC, montre que les droites (A'G) et (DC) sont parallèles ; déduis-en que (AG) // (DC).
      d) Montre que ADCG est un parallélogramme.
   3) B' est le point d'intersection de [AC] et [GD].
      Montre que [BB'] est la troisième médiane du triangle ABC.
      Que peux-tu dire des trois médianes [AA'], [BB'] et [CC'] du triangle ABC ?
   4) Compare BG et GD ; GB' et B'D en justifiant ta réponse.
   5) Recopie et complète par un coefficient.
      BG = ….GB' ;   BG = ….BB'.
2) Propriétés

   Propriété 1

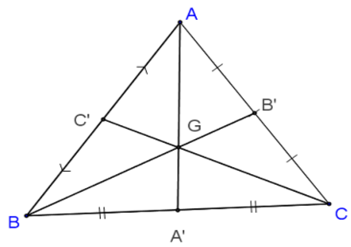
   Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G. Ce point G est appelé centre de gravité du triangle.

   Propriété 2

   Le centre de gravité d'un triangle est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant.

   Configuration

G centre de gravité de ABC

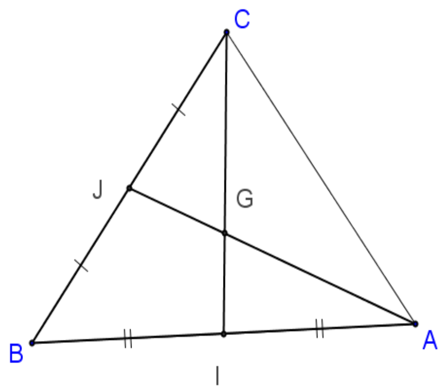


et $\begin{cases} A'\text{milieu de }[BC] \\ B'\text{milieu de }[AC] \\ C'\text{milieu de }[BC] \end{cases}$ alors $\begin{cases} AG = \frac{2}{3}\ AA' \\ BG = \frac{2}{3}\ BB' \\ CG = \frac{2}{3}\ CC' \end{cases}$

3) Méthode de construction du centre de gravité d'un triangle

Pour construire le centre de gravité d'un triangle, on construit soigneusement deux médianes de ce triangle. Leur point d'intersection est le centre de gravité de ce triangle.

Configuration



III) Reconnaissance d'un triangle isocèle

1) Propriete1

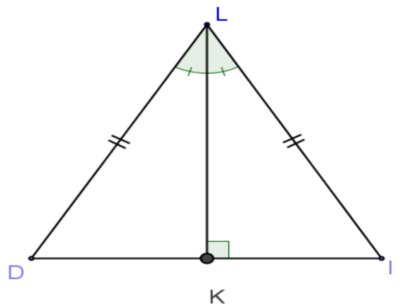
a) Activité

1) $s\widehat{A}y$ est un angle aigu. Construis sa bissectrice [Az). Marque sur [Az) un point H.
2) Trace la perpendiculaire à [Az) passant par H. Elle coupe [Ay) en B et [Ay) en B et [As) en C.
3) Que représente le segment [AH] dans le triangle ABC.
4) Montre que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.
5) Que peux-tu en déduire pour le triangle ABC ?

b) Enoncé

Un triangle dans lequel une hauteur est en même temps une bissectrice est un triangle isocèle.

Configuration



2) Propriété 2

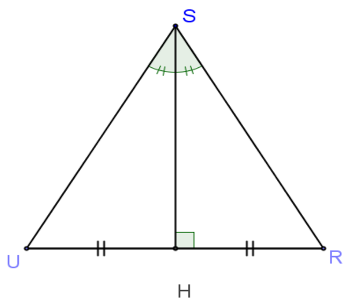
a) Activité

1) Trace un segment [AA'] de longueur 4 cm.
2) Construis un angle aigu $x\widehat{A}y$ dont [AA') est la bissectrice.
3) Marque sur [Ax) un point C et sur [Ay) un point B tels que A' soit milieu de [BC].
4) Justifie que [AA') est axe de symétrie de ABC et que ABC est isocèle.

b) Enoncé

Un triangle dans lequel une médiane et une bissectrice sont confondues est isocèle.

Configuration



3) Propriété 3

a) Activité

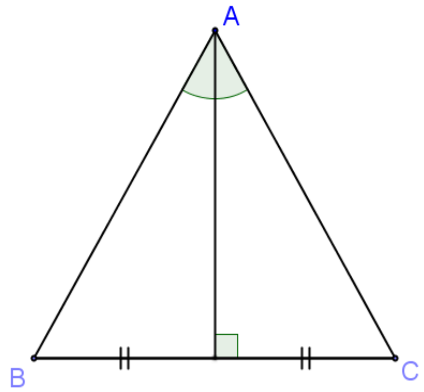
1) Trace un segment [AB] de longueur 6 cm.
2) a) Marque sur [AB] le point I tel que AI = 3 cm.
   b) Sur la perpendiculaire en I à (AB), Marque le point C tel que AC = 5 cm.
3) a) Que représente la droite (CI) pour le triangle ABC.

b) Donne la nature du triangle ABC.

b) Enoncé

Un triangle dans lequel la médiatrice d'un coté passe par le sommet opposé à ce coté est isocèle.

Configuration



Exercice d'application

1) AHC est un triangle rectangle en H. Marque sur [CH) le point B tel que $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ .Démontrer que ABC est isocèle en A.
2) On donne un triangle BHS rectangle en H. Marque le point U symétrique de B par rapport à H. Justifie que le triangle BUS est isocèle.

VI) Utilisation des droites remarquables

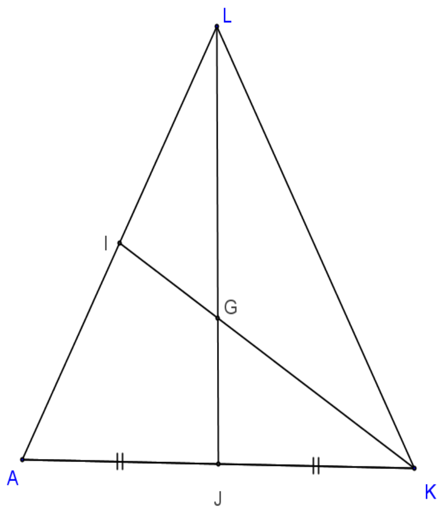
1) Une méthode pour démontrer qu'un point est milieu d'un segment

a) Exemple

Enoncé

On donne un segment [AK]. Soit J son milieu.
Place un point L non situé sur (AK) tel que JL = 6 cm.
Place sur [JL] le point g tel que LG = 4 cm.
(KG) coupe (AL) en I.
Démontre que I est le milieu de [AL].

Solution



- Je démontre que G est le centre de gravité de AKL.

AKL est un triangle, J milieu de [AK], donc [LJ] est une médiane. G est situé sur [LJ] et $\frac{\text{LG}}{\text{LJ}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, donc G est situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane [LJ] à partir de L.

Ainsi G est le centre de gravité du triangle AKL.

-Je démontre que I est le milieu de [AL].

G étant le centre de gravité de AKL, (KG) est une médiane et passe par le milieu du côté [AL] opposé au sommet K. Or (KG) coupe [AL] en I, donc I est le milieu de [AL].

b) <u>Méthode</u>

Pour démontrer qu'un point est milieu d'un côté d'un triangle, on peut prouver qu'il est le pied d'une médiane de ce triangle.

2) <u>Une méthode pour démontrer que des points sont alignés</u>

a) <u>Exemple</u>

<u>Enoncé</u>

Trace un segment de droite [BD]. Soit A son milieu.

Place ensuite les points C et E tels que C soit non situé sur (BD) et que E soit le symétrique de B par rapport à C.

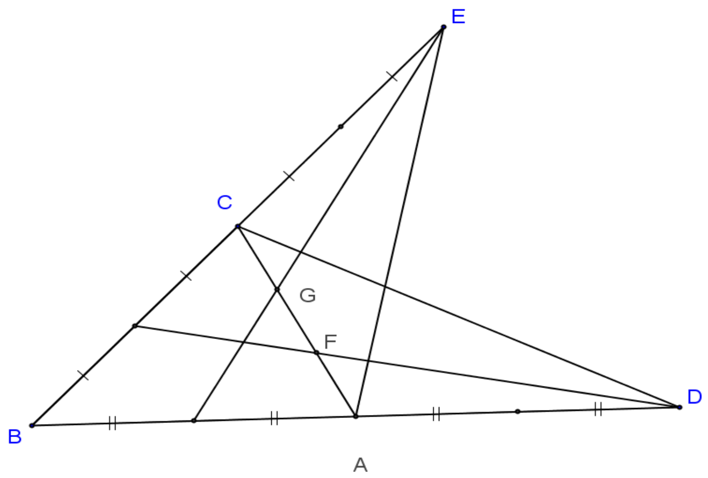
Construis les points F et G centres de gravité respectifs des triangles BCD et ABE.

Démontre que A, F et C sont alignés.

Démontre que A, G et c sont alignés

Déduis en que A, G, C et F sont alignés.

<u>Solution</u>



- Je démontre que A, F et C sont alignés.

  A est le milieu de [BD], donc [CA] est une médiane dans le triangle BCD.

  F est le centre de gravité de BCD, donc F est situé sur la médiane [AC], d'où A, F et c sont alignés.
- Je démontre que A, G et C sont alignés.

  E est le symétrique de B par rapport à C, donc C est le milieu de [EB]. Dans le triangle ABE, [AC] est une médiane ; g étant le centre de gravité de ABE, est donc situé sur la médiane [AC], d'où A, G et c sont alignés.
- Je démontre que A, G, C et F sont alignés.

  A, F et C sont alignés.

  A, G et C sont alignés, alors A, G, C et F sont alignés.

b) <u>Méthode</u>

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut montrer que ces points sont le sommet, le centre de gravité et le milieu du côté opposé à ce sommet dans un triangle.

3) <u>Une méthode pour démontrer que trois droites sont concourantes</u>

a) <u>Exemple</u>

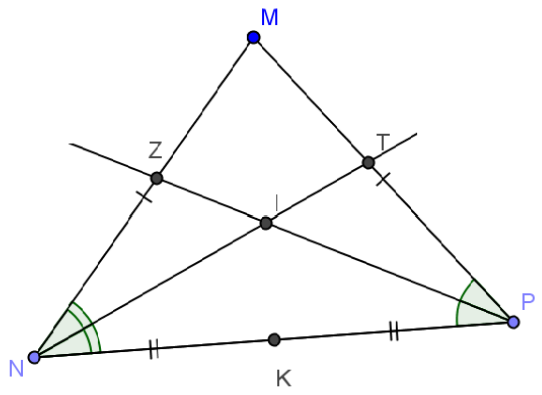
<u>Enoncé</u>

MNP est un triangle isocèle en M. K est le milieu de [NP].

Les bissectrices [PZ) et [NT) de $\widehat{MPN}$ et $\widehat{MNP}$ se coupent en I.

Démontrer que [MK] passe par I.

<u>Solution</u>



I point d'intersection des bissectrices [PZ) et [NT), alors I est le centre du cercle inscrit dans le triangle MNP.

K étant le milieu de [NP] et MNP isocèle en M, alors [MK) est une médiane et une bissectrice, d'où elle passe par I.

b) <u>Méthode</u>

Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut prouver qu'elles sont les trois bissectrices d'un triangle.