RENFORCEMENT DES CAPACITES DES FORMATEURS REGIONAUX DANS L'ENSEIGNEMENT / APPRENTISSAGE

DES MATHEMATIQUES ET DES SCIENCES

SELON L'APPROCHE ASEI / PDSI

FORMATION NATIONALE 2015

LIEU:

Centre NATIONAL DE MAINTENANCE

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

THEME : CALCULS APPROCHES - LIMITES

Compilé par les formateurs :

DE

MATHEMATIQUES

Justification

Dans de nombreuses situations de la vie courante, nous faisons appel à des encadrements, des valeurs approchées, des ordres de grandeur, des nombres infiniment petits ou infiniment grands….Ces différentes notions sont parties intégrantes du calcul approché.
Ce dernier est apparu très tôt dans l'histoire des calculs car il a été utilisé depuis l'antiquité pour répondre à des préoccupations de l'homme.
L'évolution des règles du calcul a permis les découvertes des algorithmes. Elle est à l'origine de la naissance, du développement de certaines branches (arithmétique, analyse, statistique……) et objets mathématiques (tables numériques, calculatrices ……)
De nos jours, le calcul approché reste d'actualité car il est très lié à l'informatique et à la robotique. Il est aussi utilisé dans les autres disciplines comme la physique, la chimie, l'économie…
A cet effet, notre programme intègre l'apprentissage du calcul approché dès la classe de sixième et celui des limites à partir de la classe de première, d'où l'intérêt de ce thème pour cette formation.

Objectif général :

Consolider les acquis des participants sur les calculs approchés et limites.

Objectifs spécifiques

A la fin de la formation sur le calcul approché et limites, les participants doivent être capables de :

- Définir des termes liés au calcul approché dans $\mathbb{R}$;
- Encadrer un réel par deux autres réels;
- Encadrer une fonction par deux autres fonctions ;
- Déterminer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction,
- Déterminer une valeur approchée d'une intégrale ;
- Définir la limite d'une fonction en un point et à l'infini;
- Identifier les erreurs commises fréquemment par les élèves en calcul approché et limites ;
- Elaborer des activités pour remédier à certaines erreurs.

Plan du travail

Introduction

I. Encadrement d'un réel
II. Définition de quelques termes liés au calcul approché
III. Valeur approchée des zéros d'une fonction
IV. Valeur approchée d'une intégrale
V. Encadrement d'une fonction par deux autres fonctions
VI. Quelques éléments sur les limites de fonctions/suites numériques

Conclusion

Introduction

Etymologiquement, le mot calcul dérive du *mot latin* « calculus » qui signifie petit caillou. Ces petits cailloux sont à l'origine d'un des plus anciens systèmes comptables découverts à nos jours, utilisé pour symboliser des personnes, des animaux ou des mesures de grains et pour effectuer des additions et des soustractions.
Le calcul regroupe alors toutes les branches des mathématiques : statistique, calcul intégral, calcul infinitésimal, calcul formel. Mais souvent la valeur décimale d'une fraction ou d'une racine ne peut être effectuée de manière exacte : on parle alors de calcul approché. Quant aux suites elles ont pour première utilisation d'approcher avec une précision de plus en plus fine des nombres remarquables et des fonctions.
De nos jours le calcul approché est utilisé dans tous les domaines.

I. Encadrement d'un réel

Tâche 1

Exercice 1 : Soit les réels x, y, z tels que $-1.5 < x < -1{,}4$; $5 < y < 5{,}1$ et $-1 < z < 1$
Donner un encadrement de x + y ; x – 2y ; xy ;xz ; x^2 ; z^2 ; $\sqrt{y}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{x}{y}$.

Exercice 2 : Donner les valeurs approchées des nombres $\sqrt{2}\ et\ \sqrt{5}$ par la méthode de votre choix.

Exercice 3
a)Comment choisir le réel x si le réel 2x – 5 appartient à l'intervalle $]-1;2]$?
b) Si le réel x appartient à l'intervalle $[2;3]$, à quel intervalle appartient le réel x^2 ?
Mêmes questions que b) avec les intervalles $[-3;2]$ et $[-2;3]$.

Eléments de réponse de la tâche 1

- ✓ Ajouter un même nombre aux membres d'une inégalité:

Soient a, b, c des réels .si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

- ✓ Additionner des inégalités de même ordre :

Soient a, b, c, d des réels ; si $a \leq b\ et\ c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

- ✓ Multiplier par un même nombre les membres d'une inégalité :

Soient a, b, c, des réels tels que $a \leq b$

- Si $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
- si $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

- ✓ Multiplier des inégalités de même ordre :

Soient a, b, c, d des réels positifs; si $a \leq b\ et\ c \leq d$ alors $ac \leq bd$

- ✓ Elever au carré les membres d'une inégalité :

Soient a, b deux réels positifs, si $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$

- ✓ racines carrées :

Soient a, b deux réels positifs, si $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

- ✓ inverses :

Soient a, b deux réels positifs, si $0 < a \le b$, alors $0 < \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$

Exercice 1

- ✓ $-1.5 < x < -1,4$ et $5 < y < 5,1$ alors $-1,5 + 5 < x + y < -1,4 + 5,1$ et $10 < 2y < 10,2$

Par suite **3,5** $< x + y < 3,7$

- ✓ $\begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ 10 < 2y < 10,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ -10,2 < -2y < -10 \end{cases} \Rightarrow -11,7 < x - 2y < -11,4$
- ✓ $\begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ 5 < y < 5,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,4 < -x < 1,5 \\ 5 < y < 5,1 \end{cases} \Rightarrow 7 < -xy < 7,65$ et enfin $-7,65 < xy < -7$
- ✓ $\begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ -1 < z < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ -1 < z < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ 0 < z < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,4 < -x < 1,5 \\ 0 < -z < 1 \end{cases}$
  ou $\begin{cases} 1,4 < -x < 1,5 \\ 0 < z < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < xz < 1,5$ ou $0 < -xz < 1,5 \Rightarrow 0 < xz < 1,5$ ou $-1,5 < xz < 0$
  donc $-1,5 < xz < 1,5$
- ✓ $-1.5 < x < -1,4 \Rightarrow 1,4 < -x < 1,5 \Rightarrow 1,4^2 < (-x)^2 < 1,5^2$
  d'où $1,96 < x^2 < 2,25$
  - ✓ $-1 < z < 1 \Rightarrow 0 < |z| < 1 \Rightarrow 0^2 < |z|^2 < 1^2$ et par suite $0 < z^2 < 1$
  - ✓ $-1.5 < x < -1,4 \Rightarrow 1,4 < -x < 1,5 \Rightarrow \frac{1}{1,5} < \frac{-1}{x} < \frac{1}{1,4} \Rightarrow -\frac{1}{1,4} < \frac{1}{x} < -\frac{1}{1,5}$

et enfin $-0,71428571 < \frac{1}{x} < -0,66666667$

$5 < y < 5,1 \Rightarrow \sqrt{5} < \sqrt{y} < \sqrt{5,1}$ et $\frac{1}{5,1} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5}$

$\begin{cases} -1,5 < x < -1,4 \\ 5 < y < 5,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,4 < -x < 1,5 \\ \frac{1}{5,1} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1,4}{5,1} < \frac{-x}{y} < \frac{1,5}{5} \Rightarrow \frac{-1,5}{5} < \frac{x}{y} < \frac{-1,4}{5,1}$

d'où $-0,3 < \frac{x}{y} < -0,2745098$

Exercice 3

a) 2x – 5 appartient à l'intervalle $]-1;2]$ ssi $-1 < 2x - 5 < 2$ ssi $4 < 2x < 7$ ssi $2 < x < 3,5$

il faut donc choisir x dans $]2;3,5]$ pour que 2x – 5 appartient à l'intervalle $]-1;2]$.

b) Le réel x appartient à l'intervalle $[2;3]$ ssi $2 \le x \le 3$ ssi $4 \le x^2 \le 9$

Si x appartient à l'intervalle $[2;3]$ alors x^2 appartient à l'intervalle $[4;9]$

Le réel x appartient à l'intervalle $[-3;2]$ ssi $-3 \le x \le 2$ ssi $0 \le |x| \le 3$ ssi $0 \le |x|^2 \le 9$ ssi $0 \le x^2 \le 9$

Si x appartient à l'intervalle $[-3;2]$ alors x^2 appartient à l'intervalle $[0;9]$

Le réel x appartient à l'intervalle $[-2;3]$ ssi $-2 \le x \le 3$ ssi $0 \le |x| \le 3$ ssi $0 \le |x|^2 \le 9$ ssi $0 \le x^2 \le 9$

Si x appartient à l'intervalle $[-2;3]$ alors x^2 appartient à l'intervalle $[0;9]$

II. Définitions de quelques termes liés au calcul approché

Tâche 2

1. On donne l'encadrement suivant de π : $3,1414 < \pi < 3,1417$.

Quelle est l'amplitude de l'encadrement ? Quelle est l'incertitude avec laquelle on connait la valeur de π ? Quel est le signe de l'erreur commise en écrivant $\pi = 3,1414$; en écrivant $\pi = 3,1417$. Que représente 3,1414 pour π ? ; 3, 1417 pour π ?

2. Ecrire les nombres suivants sous forme de produit d'une puissance de 10 et d'un nombre écrit avec un chiffre non nul avant la virgule : - 371,45 ; 0,000967 ; 7695,04 ; - 0,00280. Donner l'ordre de grandeur de chaque nombre.
3. Les valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près de x et y sont respectivement 2,4753 et 7,3086. Calculer une valeur approchée par défaut de x + y et de x - y à 2.10^{-3} près.
4. On donne e = 2,718281… ; π = 3,1414214…

On prend e' = 2,718 pour valeur approchée de e et π' = 3,142 pour valeur approchée de π.
Déterminer le sens de l'approximation de e et de π et l'incertitude.
Donner un encadrement de e.π, $\frac{1}{e}$ et de $\frac{\pi}{e}$ avec ces valeurs approchées.

Eléments de réponse de la tâche 2

1. L'amplitude de l'encadrement est 3,1417 -3,1414 = 0,0003 = 3.10^{-4}

L'incertitude avec la quelle on connait la valeur de π est donc ε = $\frac{3,1417-3,1414}{2}$ = 0,00015 = 15.10^{-5}

En écrivant π = 3,1414, l'erreur commise est π - 3,1414 et cette erreur est strictement positive.
En écrivant π = 3,1417, l'erreur commise est π - 3,1417 et cette erreur est strictement négative.
3,1414 est la valeur approchée par défaut de π à 15.10^{-5} près.
3,1417 est la valeur approchée par excès de π à 15.10^{-5} près.

Définitions

Etant donné deux nombres réels a et b avec a < b, x un réel :
l'expression a < x < b est un encadrement de x : on dit que x est encadré par a et b ;
l'amplitude de cet encadrement est b - a ;
L'incertitude notée ε avec laquelle on connait la valeur de x est $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$;
le nombre réel a est la valeur approchée par défaut de x à ε près ;
le nombre réel b est la valeur approchée par excès de x à ε près ;
en posant x = a, l'erreur commise sur la valeur de x est x - a et cette erreur est strictement positive ;
en posant x = b, l'erreur commise sur la valeur de x est x - b et cette erreur est strictement négative.

Remarques

Dans la pratique, a et b sont des nombres décimaux. En effet étant donné un nombre réel x, il existe un entier positif n, un nombre décimal unique de la forme a_n.tel que $a_n.10^{-n} \le x \le (a_n+1).10^{-n}$
Tout calcul numérique sera effectué sur des valeurs approchées décimales.
Tout nombre décimal compris entre a et b est une valeur approchée de x.

2. - 371,45 s'écrit -3,7145.10^{2} ; 0,000967 s'écrit 9,67.10^{-4} ; 7695,04 s'écrit 7,69504.10^{3} ; -0,00280 s'écrit -2,8.10^{-3}.

Une présentation commode d'un résultat numérique consiste à l'écrire sous la forme d'un nombre décimal dont la valeur absolue est comprise entre 1 et 9 multiplié par une puissance de 10 (positive ou négative) : c'est l'écriture normalisée ou notation scientifique d'un nombre décimal.
L'ordre de grandeur d'un nombre réel x est donné par a.10^{p} à travers les encadrements suivants :
a10^{p} ≤ $|x|$ ≤ $(a+1)10^{p}$ et 1 ≤ $|a|$ ≤ 9.
Ainsi : l'ordre de grandeur de -371,35 est - 4.10^{2} ;
l'ordre de grandeur de 0,000967 est 9.10^{-4} ;
l'ordre de grandeur de 7695,04 est 7.10^{3} ;
l'ordre de grandeur de -0,00280 est –3.10^{-3}.

3.

La valeur approchée par défaut de x + y à 2.10^{-3} près.
2,4753 est la valeur approchée par défaut de x à 10^{-4} près alors 2,4753 < x <2,4754 ;
7,3086 est la valeur approchée par défaut de y à 10^{-4} près alors 7,3086 < y <7,3087.
Donc 2,4753+7,3086 < x+y <2,4754 + 7,3087 alors 9,7839 < x + y < 9,7841 est l'encadrement de x+y à 2.10^{-4} près.
D'autre part on a 9,783 < x + y < 9,785 et 9,785 – 9,783 = 0,002 = 2.10^{-3}.
La valeur approchée par défaut à 2.10^{-3} près de x + y est 9,783.
La valeur approchée par défaut de x - y à 2.10-3 près.
On sait que 7,3086 < y < 7,3087 alors -7,3087 < -y < -7,3086 et – 4,8334 $<$ x – y $<$ - 4,8332 qui est l'encadrement de x - y à 2.10^{-4} près.
D'autre part – 4,834 $<$ x – y $<$ - 4,832 et -4,832 – (- 4,834) = 0,002 = 2.10^{-3}.,donc la valeur approchée par défaut à 2.10^{-3} près de x - y est -4,834.

4.

On aura 2,718 < e < 2,719 alors e'= 2,718 est la valeur approchée par défaut de e à 10^{-3} près.
On aura aussi 3,141 < π < 3,142 alors π'= 3,142 est la valeur approchée par excès de π à 10^{-3} près.

Un encadrement de e.π
On sait que : 2,718 < e < 2,719 et 3,141 < π < 3,142
Alors 2,718 x 3,141< e.π < 2,719 x 3,142 donc un encadrement de e.π est : 8,537238 < e.π < 8,543098.

Un encadrement de $\frac{1}{e}$.
Un encadrement de e est : 2,718 < e < 2,719 alors $\frac{1}{2{,}719} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2{,}718}$, selon la propriété de l'inverse et l'ordre dans IR. Donc 0,367782 $< \frac{1}{e} <$ 0,367917. D'où un encadrement de $\frac{1}{e}$ est : 0,367782 < $\frac{1}{e}$ < 0,367917.

Un encadrement de $\frac{\pi}{e}$.
Un encadrement de π est 3,141 < π < 3,142 et un encadrement de $\frac{1}{e}$ est 0,367782 < $\frac{1}{e}$ < 0,367917: alors 3,141x 0,367782 < π x$\frac{1}{e}$ < 3,142 x 0,367917 ; par la suite un encadrement de $\frac{\pi}{e}$ est : 1,155203 < $\frac{\pi}{e}$ < 1,155995.

III. Valeur approchée des zéros d'une fonction

Tâche 3

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie pour tout x réel par f (x) = x^3 - 3x + 1.

1. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f (x) = 0.
2. Vérifier que f admet une seule racine α dans l'intervalle $]-2;-1[$, une racine β dans l'intervalle $]0;1[$ et une racine γ dans l'intervalle $]1;2[$
3. Calculer la valeur approchée de β à 10^{-2} près par la méthode de dichotomie.

Eléments de réponse de la tâche 3

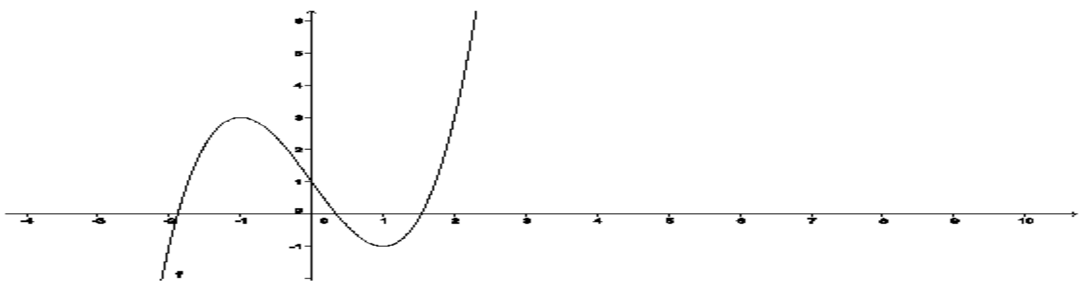
1. La résolution approchée d'une équation non linéaire f (x) = 0 où f est une fonction numérique à variable réelle, dérivable sur un intervalle I de IR, nécessite trois étapes :

Déterminer le nombre de solutions ;
Localiser chacune des solutions ;

Pour chaque solution, mettre en œuvre une méthode de calcul approché.

Le nombre de solutions de l'équation f (x) = 0.

Après étude de la fonction, la courbe représentative C_f de f est la suivante.



On constate graphiquement que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en trois points alors l'équation f (x) = 0 admets trois solutions.

2.

Une racine α de f dans l'intervalle $]-2;-1[$.

f est dérivable sur $[-2;\ -1]$; f est strictement croissante sur $[-2;\ -1]$; f (-2) = -1 ; f (-1) = 3. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f (x) = 0 admet une unique solution (racine) α dans l'intervalle $]-2;-1[$.

Une racine β dans l'intervalle $]0;1[$.

f est dérivable sur $[0;\ 1]$; f est strictement décroissante dans l'intervalle $[0;\ 1]$; f (0) = 1 ; f (1) = -1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f (x) = 0 admet une unique solution (racine) β dans l'intervalle $]0;1[$.

De la même façon que α et β, on montre que l'équation f (x) = 0 admet une unique racine γ dans l'intervalle $]1;2[$.

3. Déterminons la valeur approchée à 10-2 près de la racine β de f dans l'intervalle $]0;1[$ par la méthode de dichotomie.

Principe de la méthode de dichotomie.

Situation : f est continue sur l'intervalle $[a;b]$; f (a).f (b) < 0.

Méthode :

initialisation : [a_0, b_0] = $[a;b]$; n = 0.

calcul de w avec w = $\frac{a_0+b_0}{2}$

a) recherche du signe de f (w).

b) mise à jour de [a_n, b_n,] :
- signe de f(w) = signe de f (a_0) : [a_{n+1}, b_{n+1}] = [w, b_0] ;
- signe de f (w) = signe de f (b) : [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_0, w] ;
- f (w) = 0 alors w est la racine. Arrêt.

e) mise à jour de n : n = n +1.

f) faire a) à e) jusqu'à ce qu'on constate que le (2ème chiffre) de w après la virgule (à 10^{-2} près) ne change pas.

Application au calcul de β.

F(x) = $x^3 - 3x + 1$; [a, b] = [0, 1]. La méthode de dichotomie donne le tableau suivant.

a_n	b_n	Signe f (a_n)	Signe f (b_n)	W	Signe f (w)
0	1	+	-	0,5	-
0	0,5	+	-	0,25	+
0,25	0,5	+	-	0,375	-
0,25	0,375	+	-	0,3125	+
0,3125	0,375	+	-	0,34375	+
0,34375	0,375	+	-	0,359375	-
0,34375	0,359375	+	-	0, 351625	-
0,34375	0, 351625	+	-	0,34765625	-
0,34375	0,34765625	+	-	0,345703125	+
0,345703125	0,34765625	+	-	0,3466796875	+

On constate que le 2ème chiffre (4) après la virgule n'a pas changé depuis la 8ème itération alors la valeur approchée de β à 10^{-2} près est 0,34 : β $\approx$ 0, 34.

IV. Valeur approchée d'une intégrale

Tâche 4

Détermination de la valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.

$$f(x) = e^x$$

fig.1

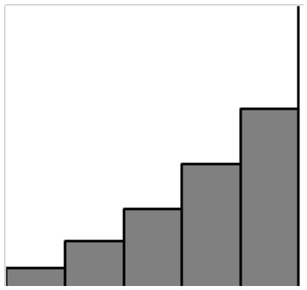
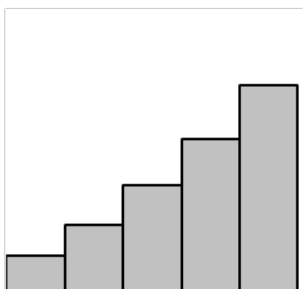


fig.2



Dans chaque cas l'intervalle [-1, 0] est subdivisé en cinq parties égales

S_1 la somme des aires des rectangles de la figure 1 ; « petits rectangles ».

S_2 la somme des aires des rectangles de la figure 2 ; « grands rectangles ».

1. Comparer S_1, S_2 et $\int_{-1}^{0} e^x$ dx.
2. Reprendre la fig. 1 et fig. 2 en subdivisant [-1, 0] en 10 parties égales.
3. On note par S'_1 et S'_2 les sommes respectives des aires des petits rectangles et des grands rectangles.
   i) Calculer S'_1 et S'_2.
   ii) Comparer S'_1, S'_2 et $\int_{-1}^{0} e^x$ dx.

Eléments de réponse de la tâche 4

Figure1

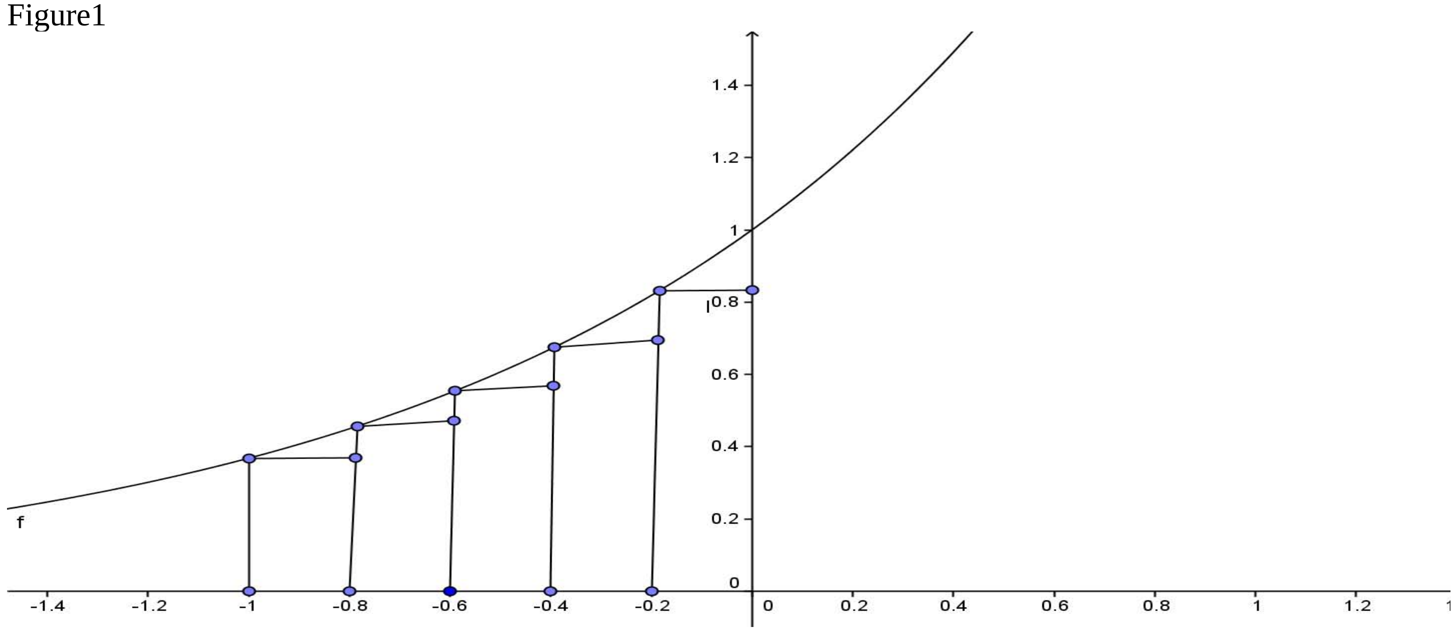
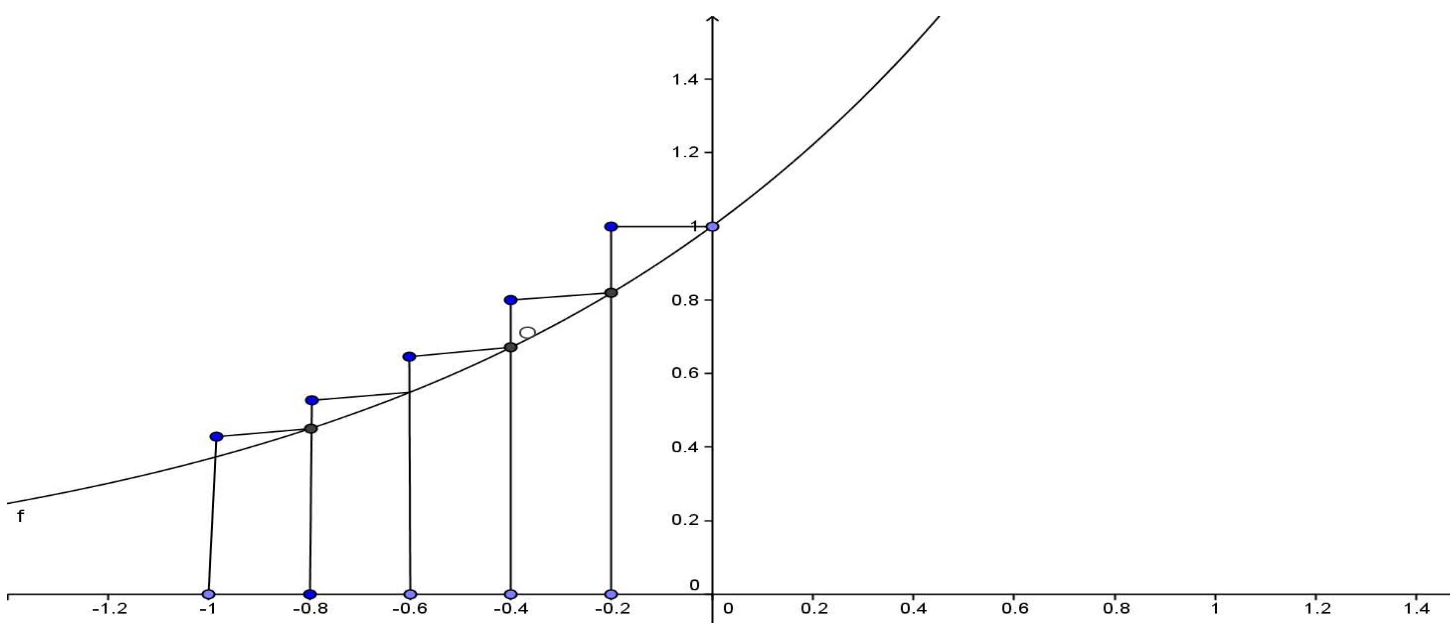


Figure2



Comparer S_1, S_2 et $\int_{-1}^{à} e^x$ dx.

F(-1) = 0,368 ; f(-0, 8) = 0,449 ; f(-0,6) = 0,549 ; f(-0,4) = 0,67 ; f(-0,2) = 0,819 ; f(0) =1

S_1 = 0,2$[f(-1) + f(-0{,}8) + f(-0{,}6) + f(-0{,}4) + f(-0{,}2)]$

= 0,2$[0{,}368 + 0{,}449 + 0{,}549 + 0{,}67 + 0{,}819]$ = 0,571

S_2 = 0,2 $[f(-0{,}8) + f(-0{,}6) + f(-0{,}4) + f(-0{,}2) + f(0)]$

= 0,2$[0{,}449 + 0{,}549 + 0{,}67 + 0{,}819 + 1]$ =0,697

$\int_{-1}^{0} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$ ≈ 0,632

.

S_1 =0,571, S_2 = 0,697 et $\int_{-1}^{à} e^x$ dx. 0,632 alors S_1 ≤ $\int_{-1}^{à} e^x$ dx. ≤ S_2

On dira alors que la valeur approchée de $\int_{-1}^{à} e^x$ dx. par défaut est S_1 = 0,571 à 63. 10^{-3} près et la valeur approchée de $\int_{-1}^{à} e^x$ dx. par excès est S_2 = 0,697 à 63. 10^{-3} près.

Reprenons la fig.1 et la fig.2 en subdivisant l'intervalle [-1, 0] en 10 parties égales

V. Encadrement d'une fonction par deux autres fonctions

Tâche 5

1. Soit f la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par, f(x) = $\sqrt{x+2}$
   - **a)** Montrer que, pour tout x $\in [-1; 2]$, $\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \le \sqrt{x+2} \le \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
   - **b)** Illustrer graphiquement le résultat.
2. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur un ensemble à préciser, déterminer un encadrement des nombres réels suivants : $a)\ \sqrt{1{,}0004}$; $b)\ \frac{1}{10001}$; c) $\frac{1}{\sqrt{9996}}$; d) sin0,52
3. Le but de cet exercice est de prouver que la fonction f définie sur D = $]0; e^2]$ par f(x) = $\sqrt{2 - \ln(x)}$, admet un unique point fixe et de déterminer une valeur approchée de celui -ci.
   - **a)** Montrer que, pour tout x élément de D, les équations f(x) = x et x^2 + ln(x) - 2 = 0 sont équivalentes.
   - **b)** Justifier que l'équation x^2 + ln(x) - 2 = 0 admet une unique solution dans D, située entre 1,30 et 1,35.
   - **c)** En déduire que f admet un unique point fixe, que l'on notera α.
   - **d)** Justifier que si x $\in I$ = $[1{,}30; 1{,}35]$, alors f(x) $\in$ I.
   - **e)** (i) Montrer que, pour tout x $\in I$, $|f'(x)| \le \frac{1}{3}$,

     (ii) Prouver que, pour tout x $\in I$, $|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{3}|x - \alpha|$.
   - **f)** Soit (u_n) la suite définie par u_1 = 1,3 et u_{n+1} = f(u_n)
     - (i) Sur un graphique, expliquer la construction des quatre premiers termes de la suite à l'aide de la courbe de f et de la droite y = x.
     - (ii) La suite semble –t- elle convergente ? si oui, vers quelle valeur ?

(ii) En déduire que, pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(iii) Déterminer la limite de la suite,

(iv) Déterminer un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Eléments de réponse de la tâche 5

1. a) f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et f ’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ et pour tout x $\in [-1:2]$

-1 $\leq x \leq 2,$ puis 1 $\leq x+2 \leq 4$, puis 1 $\leq \sqrt{x+2} \leq$ 2, 2 $\leq 2\sqrt{x+2} \leq$ 4

et $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{2}$

en appliquant le théorème des accroissements finis à f, on obtient

$\frac{1}{4}[x-(-1)] \leq f(x) - f(-1) \leq \frac{1}{2}[x-(-1)]$, finalement on trouve

$\frac{1}{4}$ x + $\frac{5}{4} \leq \sqrt{x+2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) Illustration graphique (utilisation de géogébra)

2. a) on prend f(x) = $\sqrt{x+1}$,f est continue et dérivable sur $[0;1]$ et f’(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} >$ 0 donc f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$

De plus , pour tout x élément de $[0;1]$,1 $\leq x+1 \leq 2$ et 2 $\leq 2\sqrt{x+1} \leq$ 2$\sqrt{2}$, par suite $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

En appliquant le théorème des accroissements finis on obtient $|f(0{,}0004) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|0{,}0004 - 0|$

c'est-à-dire $\left|\sqrt{1{,}0004} - 1\right| \leq \frac{1}{2}|0{,}0004|$ ou encore – 0,0002 $\leq \sqrt{1{,}0004} - 1 \leq 0{,}0002$ et

0,9998 $\leq \sqrt{1{,}0004} \leq 1{,}0002$

- Pour $\frac{1}{10001}$ on peut prendre f(x) = $\frac{1}{x+10000}$
- Pour $\frac{1}{\sqrt{9996}}$ on peut prendre f(x) = $\frac{1}{\sqrt{10000-x}}$
- Pour sin 0,52 on peut prendre f(x) = sin(0,52x)

3. a) f(x) = x $\iff \sqrt{2-\ln x}$ = x $\iff$ 3 – lnx = x^2 $\iff x^2$ + lnx - 2 = 0

Donc les équations f(x) = x et x^2 + ln(x) - 2 = 0 sont équivalentes.

b) Soit g la fonction définie sur par g(x) = x^2 + lnx - 2 . La fonction g est continue et dérivable sur $]0;e^2[$ et g ’(x) = 2x + $\frac{1}{x} >$ 0 sur $]0;e^2[$

g est donc continue et strictement croissante sur $]0;e^2[$.

De plus g(1,30) = $1{,}30^2 + \ln 1{,}30 - 2 =$ 0,047et g(1,35) = $1{,}35^2$ – ln1,35 – 2 = 0,122. g(1)xg(2) $<$ 0 et d’après le théorème des valeurs intermédiaires l’équation g(x) = 0 admet une solution unique entre 1 et 2.

c) D’après 3.a l’équation f(x) = x admet une solution unique entre 1,30 et 1,35. En d’autres termes f admet un unique point fixe α .

d) f est dérivable sur $]0;e^2[$ et f ’(x) = - $\frac{1}{x\sqrt{2-\ln x}} <$ 0 ; f est donc décroissante sur $]0;e^2[$

x $\in I$ = $[1{,}30;1{,}35]$ ssi 1$,30 \leq x \leq 1{,}35$ ssi f(1,35) $\leq f(x) \leq f(1{,}30)$ c'est-à-dire 1,114 $\leq f(x) \leq$ 1,151 alors f(x) $\in$ I.

e) (i) on a $\begin{cases} 1{,}3 \leq x \leq 1{,}35 \\ 1{,}3 \leq f(x) \leq 1{,}35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}6 \leq 2x \leq 2{,}70 \\ 1{,}3 \leq f(x) \leq 1{,}35 \end{cases} \Rightarrow$ 3,38 $\leq$ 2xf(x) $\leq$ 3,645 $\Rightarrow$

$\frac{1}{3{,}645} \leq \frac{1}{2xf(x)} \leq \frac{1}{3{,}38} \Rightarrow$ - $\frac{1}{3{,}645} \leq -\frac{1}{2xf(x)} \leq \frac{1}{3{,}38}$ d’où pour tout x $\in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$,

(ii) le théorème des accroissements finis appliqué à f avec b = x et a = α donne : pour tout x $\in I$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$ et par suite : pour tout x $\in I$,

$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$, car f($\alpha) = \alpha$.

f) (i) Construction graphique

(ii) la suite semble être convergente vers α

- $u_1 = 1{,}3 \in$ I,
- Si $u_n \in$ I alors d'après 3.d f(u_n) $\in$ I c'est-à-dire $u_{n+1} \in$ I.
- Conclusion : pour tout n, $u_n \in$ I

La suite est bien définie car u_1 est connu et de proche en proche on pourra calculer tous les termes

g)(i) En utilisant 3.e :(ii) et en prenant x = u_n on obtient $|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ c'est-à-dire que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ car $u_{n+1} = f(u_n)$.

(ii) Démontrons par récurrence, pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

- $\alpha \in$ I = $>$ 1,30 $\leq \alpha \leq$ 1,35 = $> u_1 \leq \alpha \leq$ 1,35 = $>$ 0 $\leq \alpha - u_1 \leq$ 1,35 – 1,30 = $>$ 0 $\leq \alpha - u_1 \leq 0{,}05$ et $|u_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^1$
- si $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ alors d'après g)(i) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ et par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$
- Conclusion : pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(iii) Pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ = 0 , d'après le Théorème de Gendarmes la suite (u_n) tend vers α.

(iv) Pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près il faut que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-5}$ et comme $|u_{n_0} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n_0}$ il suffit donc de choisir n_0 tel que $\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-5}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-5}$ $<=>$ ln $\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq ln10^{-5}$ $<=> n_0 ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -5ln10 <=> n_0 \geq \frac{-5ln10}{ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ c'est-à-dire $n_0 \geq$ 10,47. On prend donc n_0 = 11

Une valeur approchée de α à 10^{-5} près est u_{11}.

VI. Quelques éléments sur les limites de fonctions/suites numériques

Tâche 6

Enumérez quelques difficultés liées à l'enseignement du thème « limites de fonctions/suites » et proposer quelques activités pouvant aider à surmonter ces difficultés.

Eléments de réponse de la tâche 6

- Appréhension de la notion de limite

(Notion intuitive de limite et évolution de la notion)

- Proposition d'activités introductives de la notion de limite d'une fonction en un point ou à l'infini

Définitions

- Erreurs fréquentes des élèves dues aux mauvaises interprétations des règles de calculs de limites et notations trop abusives de certains enseignants.

1. Les erreurs

L'utilisation dans des conditions non appropriées des règles de calculs des limites des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

Exemples :

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 1}) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2}) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + e^x}{x^2 + \ln(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

L'application au voisinage d'un point des règles de calculs des limites des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini.

$\lim_{x \to 1}$ (3x4+2x – 4) = $\lim_{x \to 1}$ (3x4) = 3

2. **Les causes**
   - La non maitrise de la notion de limites ;
   - La méconnaissance des limites usuelles ;
   - La méconnaissance des opérations sur les limites ;
   - La généralisation de certains théorèmes hors de leurs domaines d'application ;
   - L'usage de faux théorèmes inventés par les élèves.

Solutions

- Amener les élèves eux-mêmes à découvrir, à démontrer ou à établir les règles, les théorèmes et les propriétés au lieu de les parachuter ;
- Rappeler les propriétés, règles et théorèmes avant de les appliquer ;
- Justifier à l'aide des exemples pourquoi certaines formes indéterminées.

2.1 Activité sur les limites des fonctions trigonométriques

Soient f(x) = $\frac{\sin(x)}{x}$ g(x) = $\frac{\cos(x)-1}{x}$

Tracer sur le même repère la courbe d'équation y = sin(x) et la droite d'équation y = x. Comment sont- elles autour de zéro ? Quelle est la limite de f en zéro ?
Exprimer cos(x) en fonction de cos($\frac{x}{2}$) ; établir que g(x) = - $-\frac{x}{2}$ [f($\frac{x}{2}$)]2 et déduire la limite de g en zéro

2.2Activité sur les limites de la fonction logarithme

Proposition1

Soit f une fonction numérique admettant une limite finie l en +∞. Soit g la fonction définie par g(x) = f(2x) . Quelle serait la limite de g en +∞ ?
Soit k(x) = ln(x) et h(x) = ln(2x). On suppose que k admet une limite finie l' en +∞. Donner la limite de h en +∞. Déterminer de nouveau la limite de h en +∞ après avoir écrit h(x) sous la forme de k(x) + m, m constante réelle à déterminer. Donner alors la limite de k en +∞.
En déduire de ce qui précède et en utilisant la propriété ln ($\frac{1}{x}$) = - ln(x) la limite de k à droite de 0.

Proposition2

Soit f(x) = ln(x) et g(x) =2 $\sqrt{x}$ - 2

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction h définie par h(x) = f(x) – g(x) pour x $\geq$ 1 ,calculer h(1) et déduire le signe de h pour x $\geq$ 1.

b) Comparer $\frac{f(x)}{x}$ et $\frac{g(x)}{x}$ pour x $\geq$ 1

c) Calculer la limite de $\frac{g(x)}{x}$ en +∞ et déduire celle de $\frac{\ln(x)}{x}$.

d) Déterminer la limite de xln(x) à droite de zéro. On utilisera c) et un changement de variable X = $\frac{1}{x}$.

2) Justifier que f est dérivable sur 0, +∞ puis calculer f'(1). Déduire la limite en 1 de $\frac{\ln(x)}{x-1}$.

Limites de suite et calcul approché

Tâche 7

Exercice

On considère les suites u et v définies par : $u_n = \frac{4(-1)^n}{2n+1}$ et $v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

a. Calculer les six premiers termes de la suite v.

Émettre une conjecture sur les positions relatives de v_n et de π suivant l'entier naturel n.

b. Pour tout entier naturel n, comparer alors $| v_n - \pi |$ à $| v_n - v_{n-1} |$ et vérifier que ce dernier réel est égal à $\frac{1}{2n+1}$. En déduire la limite de la suite v.

Conclusion

Le calcul approché comme toutes les autres activités mathématiques, nécessite au niveau de l'élève une progression, des méthodes et de la répétition. Cette progression qui commence depuis le collège avec l'utilisation des nombres π ; $\sqrt{2}; \sqrt{3}$ entre autres doit être soutenue au lycée avec l'introduction de la limite, la découverte du nombre e ,…..